7 Gennaio 2019   Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, t è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} 2x + (10-b)y + z + (a+3)t = 0 \\ -2x + (k^2+b-12)y - z - (a+3)t = k-\sqrt{2} \\ kt = a+b+1 \\ 4x + (k^2+18-2b)y + 10z + 2a(a+3)t = k+a+1 \end{cases}.$$

RISPOSTA: Se $k \in \{-\sqrt{2}, 0\}$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k = \sqrt{2}$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k \notin \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (cioè contiene un solo punto).

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+b+1 & 100 & 200 & 300 \\ 0 & 10-a & 2 & 1 \\ 0 & 10-a & a+b+3 & 2 \\ 0 & 10-a & 2 & 10-b+1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = (a+b+1)^2(10-a)(10-b)$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per il nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$T(x, y, z, t) =$$

$$\big((10-a)x+z, y+(10-b)z+t, (10-a)x+y+(11-b)z+t, (a-10)x+y+(9-b)z+t\big).$$

BASE ORTOGONALE =

$$\big\{(0, 1, 0, -1), \big(2, (10-a)(10-b), 2(a-10), (10-a)(10-b)\big)\big\}.$$

Esercizio 4 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$F(x,y,z) = \Big(x + (b-a)y + kz, 0, (b+2)x + (b-a)y + 2z\Big)$$

è semplice.

RISPOSTA: Se $a \neq b$ l'endomorfismo F è semplice se e solo se risulta $k \in \Big]-\frac{1}{4(b+2)}, \frac{2}{b+2}\Big[\bigcup \Big]\frac{2}{b+2}, \infty\Big[$.

Se $a = b$ l'endomorfismo F è semplice se e solo se $k > -\frac{1}{4(b+2)}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((1,0),(0,1)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((b+1, a+1),(b+1,1)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a+ab} & \frac{1}{a} \\ \frac{a+1}{a+ab} & -\frac{1}{a} \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (1 punto) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1,x_2) \begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ b+1 & -t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: La funzione non è mai un prodotto scalare.

Esercizio 7 (2 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ definito ponendo $f(x,y) = \Big(ax + by, bx + ay\Big)$.

BASE SPETTRALE $=((1,1),(1,-1))$.

Esercizio 8 (2 punti) Calcolare un'equazione parametrica della retta di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $(b,a,0)$ e ortogonale al piano di equazione cartesiana $x + (10-b)y + (a+2)z = 1$.

RISPOSTA: $\begin{cases} x = t + b \\ y = (10-b)t + a \\ z = (a+2)t \end{cases}$

Esercizio 9 (1 punto) Trovare una matrice quadrata di ordine 3 che ammetta come autovalori a e b e che non sia diagonalizzabile per similitudine.

RISPOSTA: una possibile risposta può essere $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
