21 Gennaio 2019 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso

GEOMETRIA E ALGEBRA T

(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, t, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (10-b)x + (a-10)y + z - u = 2(k-a) \\ (10-b)x + (k-a)y + z + t + u = a+b+1 \\ (10-2a+k)y + t + 2u = a+b-(k-a)^2 \end{cases}$$

RISPOSTA: Se $k \neq a+1$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k = a+1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10-a & 0 & 0 & 10-b \\ 1 & 0 & a+1 & 1 \\ 1 & a+2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a+3 & 1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 2(a+2)(b-a)$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$T(x,y,z,u) = \Big(x + (a+b+2)y + (a+b)z + 2u, -(a+1)x - ay + (a+2)z - 2(a+1)u,$$
$$x + 2y + 2u, (b+1)x + by - (b+2)z + 2(b+1)u\Big).$$

BASE ORTOGONALE $= \Big\{ \Big(a+b+1, 1, 1, -1\Big), \Big(1, -a-1, 1, b+1\Big) \Big\}$.

Esercizio 4 (2 punti) Dire per quali valori del parametro reale k la matrice

$$M = \begin{pmatrix} b+1 & b-10 \\ a(k-a) & b+1 \end{pmatrix}$$

ammette un solo autovalore reale (contato senza molteplicità).

RISPOSTA: Se $a \neq 0$ la matrice ammette un solo autovalore reale se e solo se $k = a$. Se $a = 0$ la matrice ammette un solo autovalore reale per ogni valore di k.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((1,0),(0,1)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((b+2,a+1),(b+1,a+2)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \frac{1}{a+b+3}\begin{pmatrix} a+2 & -b-1 \\ -a-1 & b+2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (1 punto) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1,x_2)\begin{pmatrix} t & t \\ b+2 & t+a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: Se $a \leq 1$, la funzione non è mai un prodotto scalare. Se $a > 1$ allora la funzione è un prodotto scalare per $t = b+2$.

Esercizio 7 (2 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z) = \Big((10-b)y, y, (a^2+1)z\Big)$.

BASE SPETTRALE $=((1,0,0),(10-b,1,0),(0,0,1))$.

Esercizio 8 (2 punti) Dati in $\mathbb{R}^3$ la retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} (b+1)x + kz & = & 1 \\ (a+1)y & = & 2 \end{cases}$$

e il piano di equazione cartesiana

$$3x + (10-a)y + 3z = 1,$$

determinare per quali valori del parametro reale k essi sono paralleli.

RISPOSTA: Sono paralleli se e solo se $k = b+1$.

Esercizio 9 (2 punti) Dire se esiste una matrice 2×2 che abbia traccia uguale ad a, determinante uguale a b e **non** sia diagonalizzabile. Nel caso esista, dare un esempio.

RISPOSTA: Una tale matrice esiste se e solo se $a^2 - 4b < 0$. In tal caso una possibile matrice con le caratteristiche richieste è $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.