11 Febbraio 2019 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u ammette almeno una soluzione, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (3k+3b+3)x + (3k+3b+3)z & = & -3 \\ (7k-7a-7)y + (k-a-1)u & = & k-a-1 \\ (k+b+1)x + (10-a)z & = & k+a+b-10 \\ (7k-7a-7)y + (a+b+1)u & = & a+b+1 \end{cases}.$$

RISPOSTA: **CASO** $b = 8 - 2a$**:** Il sistema lineare è impossibile se $k = 2a - 9$. Si ha che $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 1$ per $k = 10$, $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 2$ per $k = a+1$ e $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 0$ per $k \notin \{a+1, 2a-9, 10\}$.

CASO $a = 1, b = 2$**:** Il sistema lineare è impossibile se $k = -3$. Si ha che $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 1$ per $k = 2$, $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 2$ per $k = 6$ e $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 0$ per $k \notin \{-3, 2, 6\}$.

CASI RIMANENTI: Il sistema lineare è impossibile se $k = -b-1$. Si ha che $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 1$ per $k \in \{a+1, 9-a-b, 2a+b+2\}$ e $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 0$ per $k \notin \{a+1, 9-a-b, 2a+b+2, -b-1\}$.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ b+1 & 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 2\big((a+1)^2 - (b+1)^2\big)$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per il nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$T(x,y,z,w) = \Big(x-(10-a)y+(b+1)(10-a)w, 0, -(b+1)y+z+(b^2+2b+2)w, 0\Big).$$

BASE ORTOGONALE $=\Big\{(10-a,1,b+1,0),(0,b+1,-1,1)\Big\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k risulta semplice l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A=\begin{pmatrix} k & k^2-121 & 0 \\ 0 & 10-b & 0 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: F è semplice se e solo se $k\neq 10-b$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1=\Big((1,0),(0,1)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2=\Big((b+1,0),(10-a,a+1)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})=\begin{pmatrix} \frac{1}{b+1} & \frac{a-10}{(a+1)(b+1)} \\ 0 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (1 punto) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2))\mapsto (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 1 & a+b+1 \\ t-b & 999 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: La funzione è un prodotto scalare se e solo se $t=a+2b+1$.

Esercizio 7 (2 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ definito ponendo $f(x,y)=\big((2+b)x-(a+1)y,y\big)$.

RISPOSTA: Una base spettrale è $\big((1,0),(a+1,b+1)\big)$.

Esercizio 8 (2 punti) Determinare un'equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ ortogonale al piano di equazione cartesiana $(10-b)y+(a+1)z=7$ e passante per i punti $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$.

RISPOSTA: Un'equazione cartesiana è $x-\frac{a+1}{10-b}y+z=1$.

Esercizio 9 (1 punto) Dire se il polinomio $x^3+x^2+x+a+b+1$ a coefficienti in $\mathbb{Z}_{10}$ ammette radici in $\mathbb{Z}_{10}$ e, se queste esistono, dire quali sono.

RISPOSTA: Sia r il resto della divisione di $a+b$ per 10. Se $r=0$ le radici sono $3,7,9$. Se $r=1$ l'unica radice è 6. Se $r=4$ l'unica radice è 5. Se $r=5$ le radici sono $2,4,8$. Se $r=6$ l'unica radice è 1. Se $r=9$ l'unica radice è 0. Se $r\in\{2,3,7,8\}$ il polinomio non ammette radici in $\mathbb{Z}_{10}$.
