17 Giugno 2019   Matricola: a =   , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (3-k)x + y + (a+1)z + (k+5)u & = & 0 \\ (3-k)x + k^3 y + (a+1)z + (k+5)u & = & 0 \\ (k^3-1)y + (k-3)z + (k-3)u & = & 0 \\ (k^3-1)y + (2k-6)z + 2k(a+1)(k-3)u & = & b+1 \end{cases}.$$

RISPOSTA: $\boxed{\text{Caso } a \neq 0}$: Il sistema lineare ammette soluzioni se e solo se $k \notin \{3, \frac{1}{a+1}\}$. Se $k \notin \{3, \frac{1}{a+1}\}$ si ha che $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 1$ per $k = 1$, mentre per $k \neq 1$ si ha $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 0$.

$\boxed{\text{Caso } a = 0}$: Il sistema lineare ammette soluzioni se e solo se $k \notin \{3, 1\}$. Se $k \notin \{3, 1\}$ si ha $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 0$.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = (a+1)^2(b+1)^2$

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$T(x, y, z, t) = \Big((10-a)x + (a-9)y + (20-2a)z + (11-a)t, 0,$$

$$(10-b)x + (b-9)y + (20-2b)z + (11-b)t, x + (a+b-21)y + 2z + (a+b-19)t\Big).$$

BASE ORTOGONALE $= \{(10-a, 0, 10-b, 1), (1, 0, 1, a+b-20)\}$

Esercizio 4 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k risulta semplice l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^4$ definito ponendo come matrice associata ad F rispetto alla base canonica la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b+1 & b+1 & b+1 \\ 0 & 10-a & b+1 & b+1 \\ 0 & 0 & a-10 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: Se $a+b \neq 9$, F è semplice se e solo se $k \notin \{0, 10-a, a-10\}$. Se $a+b=9$, F è semplice se e solo se $k \notin \{10-a, a-10\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((1,0),(0,1)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((a+1, b+1), (-1,1)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \frac{1}{a+b+2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -b-1 & a+1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (1 punto) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1,x_2)\begin{pmatrix} a+1 & t \\ t & b+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: La funzione è un prodotto scalare se e solo se $|t| < \sqrt{(a+1)(b+1)}$.

Esercizio 7 (2 punti) Calcolare una matrice diagonale B simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} a-10 & 0 \\ -170 & 10-b \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $B = \begin{pmatrix} a-10 & 0 \\ 0 & 10-b \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Determinare un'equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ ortogonale ai piani $\pi : (b+1)x+(a+1)y = 1$ e $\pi' : -(a+1)y+(b+1)z = 1$ e passante per il punto $(0,1,0)$.

RISPOSTA: Un'equazione può essere $(a+1)x-(b+1)y-(a+1)z = -b-1$.

Esercizio 9 (1 punto) Scrivere una matrice quadrata reale che abbia come polinomio caratteristico $\lambda^2 - (2a+b)\lambda + 2ab$.

RISPOSTA: $\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.
