22 luglio 2019 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso

GEOMETRIA E ALGEBRA T

(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (b+3)x + y + (k-10+a)z + u & = & b+1 \\ x + (a+3)y + u & = & 0 \\ (b+3)x + y + (2k-20+2a)z + u & = & 2b+2 \end{array} \right. .$$

RISPOSTA: Il sistema lineare è impossibile se $k = 10 - a$, altrimenti $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 1$.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10-b & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 10-a & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 10-b & 10 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 10b(10-a)(10-b)$

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per il nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$T(x, y, z, w) = \Big((b+1)x - (b+1)z, (a+1)x + y + (a+1)z, 0, 0\Big).$$

RISPOSTA: Una possibile base ortogonale è $\{(1, -2(a+1), 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k risulta semplice l'endomorfismo F_k di $\mathbb{R}^4$ definito ponendo come matrice associata ad F_k rispetto alla base canonica la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k^2-a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k^2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: F_k non è mai semplice.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((1,0),(0,1)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((a+1,a),(-b,b+1)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(id_{\mathbb{R}^2}) = \frac{1}{a+b+2ab+1}\begin{pmatrix} b+1 & b \\ -a & a+1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (1 punto) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 1000 & t^3 \\ t+24 & a+b+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: La funzione è un prodotto scalare se e solo se $t = 3$.

Esercizio 7 (2 punti) Calcolare una matrice diagonale B simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a+b+1 \\ a+b+1 & 0 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $B = \begin{pmatrix} -a-b-1 & 0 \\ 0 & a+b+1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Calcolare un'equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ passante per i seguenti punti:

$$(a+1,b+1,0),(a+1,0,b+1),(0,a+1,b+1).$$

RISPOSTA: Un'equazione cartesiana del piano è $x+y+z-(a+b+2)=0$.

Esercizio 9 (1 punto) Scrivere una trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che non sia multipla dell'identità e ammetta $(a+1,b+1)$ come autovettore.

RISPOSTA: Una trasformazione lineare di questo tipo è

$$f(x,y) = ((b+1)x-(a+1)y,0).$$
