19 settembre 2005

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1) *Si consideri la trasformazione lineare T_t da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ definita, per ogni vettore $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, dall'uguaglianza $T_t(x, y, z) = ((a + 1 - t)x + y + 2z, (t - b - 1)y, tx + y + 2z)$.*
   a) *Calcolare le dimensioni di $Ker\ T_t$ e $Im\ T_t$ al variare del parametro reale t. (6 punti)*
   b) *Calcolare una base di $Im\ T_t$ nel caso $t = b + 1$. (3 punti)*

2) *Si ponga $\alpha = 10 - a$ e $\beta = 10 - b$. Dato l'endomorfismo T_k da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ dove*

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha & k & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & k & -\beta \end{pmatrix}$$

   a) *Dire (motivando la risposta) per quali valori del parametro reale k la matrice A_k è diagonalizzabile per similitudine. (6 punti)*
   b) *Scrivere un'equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ortogonale alla retta $r : \begin{cases} (a+1)x - y = 2 \\ y = 10 - b \end{cases}$ e passante per il punto P di coordinate $(b, 0, a)$, rispetto al riferimento cartesiano naturale. (3 punti)*

SOLUZIONI

1)
   a) *Detta A_t la matrice associata a T_t rispetto alla base canonica si ha che*

$$A_t = \begin{pmatrix} a+1-t & 1 & 2 \\ 0 & t-b-1 & 0 \\ t & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\det A_t = 2(a + 1 - 2t)(t - b - 1)$.
CASO $a \neq 2b + 1$:
se $t \neq (a + 1)/2, b + 1$ allora $\rho(A_t) = 3$ ($\dim ImT_t = 3$, $\dim\ker T_t = 3 - 3 = 0$),
se $t = (a + 1)/2$ oppure $t = b + 1$ allora $\rho(A_t) = 2$ ($\dim ImT_t = 2$, $\dim\ker T_t = 3 - 2 = 1$).

CASO $a = 2b + 1$:
se $t \neq b + 1$ allora $\rho(A_t) = 3$ ($\dim ImT_t = 3$, $\dim\ker T_t = 3 - 3 = 0$),
se $t = b + 1$ allora $\rho(A_t) = 1$ ($\dim ImT_t = 1$, $\dim\ker T_t = 3 - 1 = 2$).

   b) *Una base come quella cercata è $\big((a - b, 0, b + 1), (1, 0, 1)\big)$ se $a \neq 2b + 1$ e $\big((1, 0, 1)\big)$ se $a = 2b + 1$.*

2)
   a) *Il polinomio caratteristico è $p(t) = (t - \alpha)(t - k)(t + \beta)$. Gli autovalori sono $\alpha, k, -\beta$.*
Se $k \neq \alpha, -\beta$ abbiamo tre autovalori distinti e dunque A è diagonalizzabile per similitudine.
Se $k = \alpha$ abbiamo i due autovalori α e $-\beta$. L'autovalore α ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, dunque A non è diagonalizzabile per similitudine.
Se $k = -\beta$ abbiamo i due autovalori α e $-\beta$. L'autovalore $-\beta$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, dunque A non è diagonalizzabile per similitudine.

   b) *Risolvendo il sistema si trova che i numeri direttori della retta sono $(0, 0, 1)$. I piani ortogonali alla retta sono quelli di equazione $z = k$. Imponendo il passaggio per P si trova $k = a$. Quindi un'equazione cartesiana del piano cercato è $z = a$ (tutte le altre si trovano moltiplicando questa equazione per una costante non nulla).*