9 settembre 2019   Matricola: a =   , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (2b+2+2k)y + (b+1+k)u &= b+1+k \\ (10-a-k)x + (10-a-b)z &= 11-b+k \\ (40-4a-4k)x + (40-4a-4k)z &= 4 \\ (2b+2+2k)y + (11+2k)u &= 11+2k \end{cases}.$$

RISPOSTA: Il sistema lineare ammette soluzione se e solo se risulta $k \notin \{b, 10-a\}$. Se $k \notin \{b, 10-a\}$ la dimensione dello spazio delle soluzioni è 0 per $k \notin \{-b-1, b-10\}$ e 1 per $k \in \{-b-1, b-10\}$.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10-a & 0 & 0 \\ b-1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = (a-10)(11-b)$

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$T(x, y, z, w) =$$

$$\Big(3x+3w, (a+1)y-(a+1)z, 4(b+1)x+y+bz+2(b+1)w, -4x+(b+1)y-(b+2)z-2w\Big).$$

BASE = $\{(1, 0, 0, 0), (0, a+1, 1, b+1), (0, 0, b+1, -1)\}$

Esercizio 4 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k risulta semplice l'endomorfismo F_k di $\mathbb{R}^3$ definito ponendo come matrice associata ad F_k rispetto alla base canonica la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & k \\ 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: F_k è semplice se e solo se $k > -\frac{(b+1)^2}{4(a+1)}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((1,0),(0,1)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((10-a, b+1),(10-b, 10-a)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(id_{\mathbb{R}^2}) = \frac{1}{(10-a)^2-(10-b)(b+1)} \begin{pmatrix} 10-a & b-10 \\ -b-1 & 10-a \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (1 punto) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1,x_2) \begin{pmatrix} t & a+b+1 \\ a+b+1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: La funzione è un prodotto scalare se e solo se $t > a+b+1$.

Esercizio 7 (2 punti) Calcolare una matrice diagonale B simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} 20-a-b & 20-a-b \\ 20-a-b & 20-a-b \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 40-2a-2b \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Calcolare delle equazioni parametriche della retta di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $(10-a, 10-a, 10-a)$ e parallela ai piani di equazioni, rispettivamente, $(a+2)x+y+z=0$ e $x+(b+2)y+z=0$.

RISPOSTA: delle equazioni possono essere $x = (b+1)t+10-a; y = (a+1)t+10-a; z = -(2b+2a+ab+3)t+10-a$.

Esercizio 9 (1 punto) Scrivere una trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che non ammetta $(a+1,0)$ come autovettore e abbia $a+1$ e $-b-1$ come autovalori.

RISPOSTA: Una trasformazione lineare di questo tipo è

$$f(x,y) = ((a+1)x, x-(b+1)y).$$
