13 Gennaio 2020 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} kz = 20 - a - b \\ 24x + (k^2 + 2a + 1)y + 9z + (b+1)u = k + a + b + 1 \\ 12x + (a+1)y + z + (b+1)u = 0 \\ -12x + (k^2 - a - 2)y - z - (b+1)u = k - 1 \end{cases}$$

RISPOSTA: Il sistema lineare è impossibile se $k \in \{-1, 0\}$. Si ha che $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 1$ per $k = 1$ e $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 0$ per $k \notin \{-1, 0, 1\}$.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10-a & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 10-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10-b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10-a \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = \big((10-a)(10-b)\big)^2 - 1$

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per il nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} b+3 & 1-(a+3)(b+1) & -(1+2(a+3)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a+b & -(a+3)(a+b+2)-1 & 0 & 1+2(a+3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

BASE ORTOGONALE $= \{(a+3, 1, 1, 1), (-1, 2, -b-1, a+b+2)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k risulta semplice l'endomorfismo F_k di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A_k = \begin{pmatrix} a+b+1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & k^3-1 & a+3 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: F è semplice se e solo se $k \neq a+3$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \big((3b+10, b+6), (a+6, 3a+10)\big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \big((1,3),(3,1)\big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & a+3 \\ b+3 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Dire se esiste la matrice inversa A^{-1} della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 10-b \\ 0 & a+1 & 0 \\ 10-b & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

e, in caso affermativo, calcolarla.

RISPOSTA: L'inversa esiste se e solo se $a \neq 9-b$ e in tal caso

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{(a+1)^2-(10-b)^2} & 0 & \frac{b-10}{(a+1)^2-(10-b)^2} \\ 0 & \frac{1}{a+1} & 0 \\ \frac{b-10}{(a+1)^2-(10-b)^2} & 0 & \frac{a+1}{(a+1)^2-(10-b)^2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7 (2 punti) Determinare se esiste una base spettrale per l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ definito ponendo $f(x,y) = \big(x+(10-a)y, (b+1)y\big)$. Se esiste, calcolarla.

RISPOSTA: Esiste una base spettrale se e solo se $b \neq 0$; in tal caso, una base spettrale è $\big((1,0),(10-a,b)\big)$.

Esercizio 8 (1 punto) Determinare un'equazione parametrica della retta di $\mathbb{R}^3$ ortogonale al piano $\pi : (10-b)x + (10-a)y + (b+3)z = a+b+1$ e passante per il punto $(a+1, b+1, a+b+1)$.

RISPOSTA: Un'equazione può essere $\begin{cases} x = (10-b)s + a + 1 \\ y = (10-a)s + b + 1 \\ z = (b+3)s + a + b + 1 \end{cases}$.

Esercizio 9 (1 punto) Dire, motivando la risposta, se esiste una matrice reale 3×3 antisimmetrica che ammetta $10 - a$ e $b - 10$ come autovalori.

RISPOSTA: No, perché il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ di una tale matrice è del tipo $-\lambda(\lambda^2 + x^2 + y^2 + z^2)$ con $x, y, z \in \mathbb{R}$ e quindi non ammette radici reali diverse da 0.
