27 Gennaio 2020 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso

GEOMETRIA E ALGEBRA T

(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (b+3)x + (a-10)y + (k^2 - (11-b)^2)z + (a+b+1)u = 2 \\ (b+3)x + (a-10)y + kz + 4(a+b+1)u = 2 \\ (b+3)x + (a-10)y + (a+b+1)u = 2 \end{cases}$$

RISPOSTA: Se $k \in \{11-b, b-11\}$ si ha che $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 2$, altrimenti si ha che $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 1$.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} b+1 & a+1 & b+2 & 0 \\ a+4 & 0 & 0 & 1 \\ b+4 & 0 & 0 & 1 \\ a+2 & b+2 & a+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = (a-b)(a-b-1)(a+b+3)$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} a+1 & a+1 & a+1 & a+1 \\ 1 & 2 & b+1 & b+2 \\ 1 & 2 & b+1 & b+2 \\ 2 & 1 & -(b+1) & 1-b \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: Una base ortogonale è $\{(1,0,0,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k risulta semplice l'endomorfismo F_k di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ b-10 & 0 & 10-a \\ a+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: F è semplice se e solo se $k \in \left\{ x \in \mathbb{R} : x > -\frac{1}{a+1}, x \neq \frac{3}{a+1} \right\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((1,0),(0,1)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((a+10,3),(1,b+1)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(id_{\mathbb{R}^2}) = \frac{1}{a+ab+10b+7} \begin{pmatrix} b+1 & -1 \\ -3 & a+10 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Dire se esiste la matrice inversa A^{-1} della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b+1 \end{pmatrix}$$

e, in caso affermativo, calcolarla.

RISPOSTA: Esiste ed è $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+1} & -\frac{1}{a+1} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{b+1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{b+1} \end{pmatrix}$.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare una matrice diagonale D simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 2 & a+b-20 & 0 \\ \sqrt{31} & 2 & 11+b \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $D = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & a+b-20 & 0 \\ 0 & 0 & 11+b \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (1 punto) Determinare un vettore direttore $\mathbf{n}$ della retta ottenuta intersecando i piani

$$\pi_1 : (b+1)x + 2y + (a+1)z = 4$$

$$\pi_2 : (b+1)x + y + (a+1)z = 2.$$

RISPOSTA: Un vettore direttore è $\mathbf{n} = (a+1, 0, -b-1)$.

Esercizio 9 (2 punti) Si scriva una matrice reale 2×2 che non sia triangolare e abbia $\lambda^2 - 2(11+a-b)\lambda + 4(a+1)(10-b)$ come polinomio caratteristico.

RISPOSTA: Una matrice del tipo richiesto è $\begin{pmatrix} 11+a-b & 9-a-b \\ 9-a-b & 11+a-b \end{pmatrix}$.
