10 Febbraio 2020 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (k-a-1)y+(a+1)z+(a+1)u & = & 0 \\ (k-3)x+(a+1-k)y-(a+1)z+(k-a-1)u & = & 1 \\ 2ku = 2 \\ 2(k-a-1)y+2(a+1)z+2(a+1)u & = & 0 \\ (k-3)x+(k^2-9)z & = & 0 \end{cases}$$

RISPOSTA:

$\boxed{\text{Caso } a \neq 2}$ Se $k \in \{0, a+1\}$, $Sol(\mathbf{S}_k) = \emptyset$; se $k = 3$, $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 2$; se $k = -3$, $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 1$; se $k \notin \{0, 3, -3, a+1\}$, $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 0$.

$\boxed{\text{Caso } a = 2}$ Se $k = 0$, $Sol(\mathbf{S}_k) = \emptyset$; se $k = 3$, $Sol(\mathbf{S}_k) = 2$; se $k = -3$, $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 1$; se $k \notin \{0, 3, -3\}$, $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 0$.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a+1 & 0 & b+1 \\ b+1 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a+1 \\ a+1 & 0 & b+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = -\left((a+1)^2-(b+1)^2\right)^2$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$T(x,y,z,w) = \big((20-2a)x+2y+(20-b)z, (a+b-20)x-y+(b-a)z+w,$$

$$(a-10)x-y+(b-10)z, (20-a-b)x+y+(a-b)z+w\big)$$

.

RISPOSTA:

$\boxed{\text{Caso } b \neq 0}$ BASE ORTOGONALE = base canonica di $\mathbb{R}^4$

$\boxed{\text{Caso } b = 0}$ BASE ORTOGONALE $= \{(0,1,0,0),(2,0,-1,0),(0,0,0,1)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k risulta semplice l'endomorfismo F_k di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A_k = \begin{pmatrix} 2020 & 2020 & 0 & 0 \\ 2020 & 2020 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^3-27 & 0 \\ 0 & 0 & a+b+1 & k^3-27 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: per nessun valore di k.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \big((3(b-10),0),(1,3(a+1))\big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \big((1,2),(3,0)\big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2}(a+1) \\ b-10 & -\frac{3a+1}{6} \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punto) Dire se esiste la matrice inversa A^{-1} della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi \\ 0 & a-b & 0 \\ a+b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, in caso affermativo, calcolarla.

RISPOSTA: Se $a = b$ non esiste la matrice inversa; altrimenti, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a+b} \\ 0 & \frac{1}{a-b} & 0 \\ \frac{1}{\pi} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 7 (2 punti) Dire se esiste una base spettrale per l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ definito ponendo $f(x,y) = \big(2x,(10-a)x+(b-3)y\big)$ e, in caso affermativo, calcolarla.

RISPOSTA: Se $b = 5$ non esiste alcuna base spettrale. Se $b \neq 5$ una base spettrale è $\big((5-b,10-a),(0,1)\big)$.

Esercizio 8 (1 punti) Dati la retta di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x-(a+b+1)y+z+\sqrt{a+b+1}=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$$

e il piano di equazione cartesiana

$$9x-k^2y+9z+3k=0,$$

determinare per quali valori di k essi sono paralleli e disgiunti e quando il piano contiene la retta.

RISPOSTA: Se $k = 3\sqrt{a+b+1}$, il piano contiene la retta. Se $k = -3\sqrt{a+b+1}$, il piano e la retta sono paralleli e disgiunti. Per ogni altro valore di k il piano e la retta non sono fra loro paralleli.

Esercizio 9 (1 punto) Si scriva una matrice reale 3×3 che abbia traccia nulla e determinante uguale a $-(a+1)(b+1)$.

RISPOSTA: Una matrice del tipo richiesto è

$$\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{1+4(a+1)(b+1)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{1+4(a+1)(b+1)}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
