20 Marzo 2007

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 263571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1)

a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, u

$$\begin{cases} 2x & -2y & +4z & & = & 2 \\ x & +(t-b-2)y & +2z & & = & 2 \\ x & -y & +2z & +(b+1-t)u & = & 1 \\ -x & +y & +(t+a-1)z & +(t+a+1)u & = & t+a \end{cases}$$

al variare del parametro reale t, dicendo per quali valori di t esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni. *(5 punti)*

b) Si scriva la matrice associata, rispetto alla base canonica, ad una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ scelta a piacere tra quelle per cui $Im(T) = U$, dove

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (a+1)x + (b+1)y - z - (a+2)t = 0, (a+1)x - y = 0\} ,$$

e si calcoli $Ker(T)$. *(4 punti)*

2) Si ponga $\alpha = 10 - a$ e $\beta = 10 - b$.

a) Si consideri l'endomorfismo $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ dove

$$A_k = \begin{pmatrix} \beta & k & -k \\ 0 & -\alpha & 0 \\ \beta - k & k & 0 \end{pmatrix} .$$

Determinare per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo T_k è diagonalizzabile. *(5 punti)*

b) Si calcoli una base per il complemento ortogonale del sottospazio vettoriale $U \subseteq \mathbb{R}^4$ dove

$$U = L(\{(\beta, 1, 0, -1), (0, \alpha, -1, -\beta), (\alpha + \beta, 1, 0, 0)\}) .$$

(4 punti)

SOLUZIONI:

1a) La matrice incompleta e completa associate al sistema sono rispettivamente

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & t-b-2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & b+1-t \\ -1 & 1 & t+a-1 & t+a+1 \end{pmatrix} .$$

e

$$C_t = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & t-b-2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & b+1-t & 1 \\ -1 & 1 & t+a-1 & t+a+1 & t+a \end{pmatrix} .$$

Se $t \neq -(a+1), (b+1)$ risulta $\rho(A_t) = \rho(C_t) = 4$ e dim(Sol(S))=0; se $t = (b+1)$ risulta $\rho(A_t) = 2 \neq 3 = \rho(C_t)$ e dunque $Sol(S) = \emptyset$; se $t = -(a+1)$ risulta $\rho(A_t) = \rho(C_t) = 3$ e dim(Sol(S))=1.

1b) Una possibile soluzione è data dalla trsformazione lineare T associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a+1) & 0 & 0 & 0 \\ (a+1)(b+2) & -(a+2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

In questo caso, $Ker(T) = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 : x = 0, y = 0\}$.

20 Marzo 2007

2a) Il polinomio caratteristico è $p(t) = (t+\alpha)(t^2 - t\beta + \beta k - k^2)$. Gli autovalori sono $-\alpha, \beta - k, k$.

Se $k \neq -\alpha, \frac{\beta}{2}, \alpha + \beta$ si hanno tre autovalori distinti e quindi A_k è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = -\alpha$ abbiamo che $ma(-\alpha) = mg(-\alpha) = 2$ e $ma(\alpha+\beta) = mg(\alpha+\beta) = 1$ e dunque $A_{-\alpha}$ è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = \frac{\beta}{2}$ abbiamo che $ma(-\alpha) = mg(-\alpha) = 1$ e $ma(\frac{\beta}{2}) = 2 \neq mg(\frac{\beta}{2}) = 1$ e dunque $A_{\frac{\beta}{2}}$ non è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = \alpha + \beta$ abbiamo che $ma(\alpha+\beta) = mg(\alpha+\beta) = 1$ e $ma(-\alpha) = 2 \neq 1 = mg(-\alpha)$, quindi $A_{\alpha+\beta}$ non è diagonalizzabile per similitudine.

2b) Una possibile rappresentazione di ${}^{\perp}U$ è data da ${}^{\perp}U = L(\{(1, -(\alpha+\beta), -\alpha^2, -\alpha)\})$.