21 Luglio 2006

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1)

a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, u

$$\begin{cases} x & +(\frac{1}{2}-a)ty & & & = & 1 \\ bx & +t^2y & +2z & +2tu & = & t \\ (b-1)x & +\frac{a}{2}y & +2z & +2tu & = & -a-1 \\ (b+1)x & +\frac{1}{2}(1-a)y & +2z & +u & = & t+1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale t, dicendo per quali valori di t esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni. *(6 punti)*

b) Si ponga $\alpha = 10 - a$ e $\beta = 10 - b$. Scrivere le equazioni del piano di $\mathbb{R}^3$ ortogonale ai piani $\pi_1 : -x + \alpha y - 2z = 0$ e $\pi_2 : 2x + z - 3 = 0$ e passante per il punto P di coordinate $(1, 0, \beta)$, rispetto al riferimento cartesiano naturale. *(3 punti)*

2)

a) Si ponga $\alpha = a + 1$ e $\beta = b + 1$. Si consideri l'endomorfismo $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ dove

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 2k \\ -\beta & \alpha & -\beta \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo T_k è diagonalizzabile. *(5 punti)*

b) Posto $k = \alpha$, verificare che T_α ammette base spettrale e individuarne una. *(4 punti)*

SOLUZIONI:

1a) La matrice incompleta e completa associate al sistema sono rispettivamente

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & (\frac{1}{2}-a)t & 0 & 0 \\ b & t^2 & 2 & 2t \\ (b-1) & \frac{a}{2} & 2 & 2t \\ (b+1) & \frac{1}{2}(1-a) & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$C_t = \begin{pmatrix} 1 & (\frac{1}{2}-a)t & 0 & 0 & 1 \\ b & t^2 & 2 & 2t & t \\ (b-1) & \frac{a}{2} & 2 & 2t & -a-1 \\ (b+1) & \frac{1}{2}(1-a) & 2 & 1 & t+1 \end{pmatrix}.$$

Se $t \neq \frac{1}{2}, -a$ risulta $\rho(A_t) = \rho(C_t) = 4$ e dim(Sol(S))=0; se $t = \frac{1}{2}$ risulta $\rho(A_t) = 2 \neq 3 = \rho(C_t)$ e dunque $Sol(S) = \emptyset$; se $t = -a$ risulta $\rho(A_t) = \rho(C_t) = 3$ e dim(Sol(S))=1.

1b) Una equazione del piano cercato è $\pi : x - \frac{3}{\alpha}y - 2z + 2\beta - 1 = 0$.

2a) Il polinomio caratteristico è $p(t) = (t-\alpha)(t^2 - tk - 2k^2)$. Gli autovalori sono $\alpha, -k, 2k$.
Se $k \neq 0, -\alpha, \frac{\alpha}{2}$ si hanno tre autovalori distinti e quindi A_k è diagonalizzabile per similitudine.
Se $k = 0$ abbiamo che $ma(0) = mg(0) = 2$ e $ma(\alpha) = mg(\alpha) = 1$ e dunque A_0 è diagonalizzabile per similitudine.
Se $k = -\alpha$ abbiamo che $ma(\alpha) = mg(\alpha) = 2$ e $ma(-2\alpha) = mg(-2\alpha) = 1$ e dunque $A_{-\alpha}$ è diagonalizzabile per similitudine.
Se $k = \frac{\alpha}{2}$ abbiamo che $ma(-\frac{\alpha}{2}) = mg(-\frac{\alpha}{2}) = 1$ e $ma(\alpha) = 2 \neq 1 = mg(\alpha)$, quindi $A_{\frac{\alpha}{2}}$ non è diagonalizzabile per similitudine.

2b) Per $k = \alpha$ A_α ammette tre autovalori distinti e quindi T_α ammette base spettrale. Una possibile è $\{(0,1,0), (1,0,-1), (2, -\frac{3\beta}{\alpha}, 1)\}$.