22 giugno 2006

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 163571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1) Si ponga $\alpha = 10 - a$ e $\beta = 10 - b$. Data la trasformazione lineare T_t da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ di equazione matriciale $(y) = A_t(x)$ dove

$$A_t = \begin{pmatrix} 3t-\alpha & \alpha - t & 0 & 2\alpha \\ -2 & 1 & \beta - 2t & 1 \\ 4 & -2 & 0 & -2 \\ 6\alpha & -3\alpha & 2t-\beta & -3\alpha \end{pmatrix}$$

a) Calcolare le dimensioni di $Ker\ T_t$ e $Im\ T_t$ al variare del parametro reale t. (5 punti)
b) Calcolare una base di $Im\ T_t$ nel caso $t = 0$ e individuare le componenti, rispetto a tale base, del vettore $(1,0,0,0) \in Im\ T_t$. (4 punti)

2) Si ponga $\alpha = a + 1$ e $\beta = b + 1$. Dato l'endomorfismo T_k da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ dove

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & \alpha \\ -2k & -k & -\alpha \\ 2\beta & 2\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

a) Si determini per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo T_k è diagonalizzabile per similitudine. (6 punti)
b) Si calcoli una base per il complemento ortogonale del sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori $(a+2, 0, 0, -3, -1)$ e $(1, -1, 2, 10-b, -1)$. (3 punti)

SOLUZIONI:

(1a)
dim $Im(T_t) = 2$, dim $Ker(T_t) = 2$ *per* $t = -\alpha$
dim $Im(T_t) = 2$, dim $Ker(T_t) = 2$ *per* $t = \frac{\beta}{2}$
dim $Im(T_t) = 3$, dim $Ker(T_t) = 1$ *altrimenti*

(1b)
Una base per $Im\ T_0$: $B = \{(-\alpha, -2, 4, 6\alpha), (\alpha, 1, -2, -3\alpha), (0, \beta, 0, -\beta)\}$; $(1,0,0,0) \equiv_B (\frac{1}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}, 0)$

(2a)
Il polinomio caratteristico è $p(t) = (t-k)(t+k)(t-(\alpha+\beta))$. Gli autovalori sono $k, -k, \alpha+\beta$.
Se $k \neq 0, \pm(\alpha+\beta)$ abbiamo tre autovalori distinti e quindi T_k è diagonalizzabile per similitudine.
Se $k = 0$ abbiamo i due autovalori $0, \alpha+\beta$. L'autovalore 0 ha molteplicità algebrica pari a 2 e molteplicità geometrica pari a 1, dunque T_0 non è diagonalizzabile per similitudine.
Se $k = \alpha+\beta$ abbiamo i due autovalori $-(\alpha+\beta), \alpha+\beta$. L'autovalore $\alpha+\beta$ ha molteplicità algebrica pari a 2 e molteplicità geometrica pari a 1, dunque $T_{\alpha+\beta}$ non è diagonalizzabile per similitudine.
Se $k = -(\alpha+\beta)$ abbiamo i due autovalori $-(\alpha+\beta), \alpha+\beta$. L'autovalore $\alpha+\beta$ ha molteplicità algebrica pari a 2 e molteplicità geometrica pari a 1, dunque $T_{-(\alpha+\beta)}$ non è diagonalizzabile per similitudine.

(2b)
Una base per il complemento ortogonale è $\{(1, -a-1, 0, 0, a+2), (0, 2, 1, 0, 0), (0, 13-b, 0, 1, -3)\}$.