22/07/2004

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1)

a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z

$$\begin{cases} (a+1-t)x & +(b+10)y & -t^2z & = & 1 \\ x & & +z & = & 0 \\ (1+t)x & +y & +tz & = & -1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale t, dicendo per quali valori di t esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni. *(6 punti)*

b) Si considerino in IR^3 i piani α e β di equazioni cartesiane $(10-a)x + 2y + z = 1$ e $2x + 2(a-10)y + (a-10)z = 4$, rispetto al riferimento cartesiano naturale. Si determini un'equazione cartesiana del piano passante per $(0, 0, 1)$ e ortogonale sia ad α che a β. *(3 punti)*

2) Si consideri l'endomorfismo $T : IR^3 \to IR^3$ di equazione matriciale $(y) = A(x)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} b+1 & a+1 & 0 \\ 0 & b+2 & a+1 \\ 0 & 0 & b+3 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare se T è diagonalizzabile e, in caso affermativo, calcolare una base spettrale per T. *(5 punti)*

b) Calcolare una base qualunque di ${}^{\perp}U$ sapendo che il sottospazio vettoriale $U \subset IR^4$ è generato dai due vettori $(1, 10-a, 0, -1)$, $(2, 0, 10-b, 1)$. *(4 punti)*

SOLUZIONI

1)

a) Dette rispettivamente A_t e C_t la matrice completa e incompleta del sistema si ha che $\rho_t(C) = 3$ per ogni valore di t perché $\det \begin{pmatrix} b+10 & -t^2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & t & -1 \end{pmatrix} = -(b+11) \neq 0$ per ogni t.

Invece risulta $\det A_t = -t^2 + t + (b+9-a)$. Quindi $\rho(A_t) = 3$ per $t \neq \frac{1\pm\sqrt{1+4(b+9-a)}}{2}$, mentre si verifica facilmente che $\rho(A_t) = 2$ per $t = \frac{1\pm\sqrt{1+4(b+9-a)}}{2}$. Perciò abbiamo una sola soluzione ($\dim Sol(S) = 3 - 3 = 0$) per $t \neq \frac{1\pm\sqrt{1+4(b+9-a)}}{2}$ e nessuna soluzione altrimenti.

b) Sia $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ un'equazione cartesiana del piano cercato. Le condizioni di ortogonalità divengono $(10-a)\alpha + 2\beta + \gamma = 0$ e $2\alpha + 2(a-10)\beta + (a-10)\gamma = 0$. Quindi $(\alpha, \beta, \gamma) = k(0, 1, -2)$. Scegliendo $k = 1$ e imponendo il passaggio per il punto $(0, 0, 1)$ si ottiene che un'equazione cartesiana del piano cercato è $y - 2z + 2 = 0$.

2)

a) Gli autovalori sono $b+1, b+2, b+3$: essendo tutti distinti T è diagonalizzabile.
L'autospazio di $b+1$ è generato dal vettore $(1, 0, 0)$.
L'autospazio di $b+2$ è generato dal vettore $(a+1, 1, 0)$.
L'autospazio di $b+3$ è generato dal vettore $((a+1)^2, 2(a+1), 2)$.
Una base spettrale per T è quindi data da $\big((1, 0, 0), (a+1, 1, 0), ((a+1)^2, 2(a+1), 2)\big)$.

b) Imponendo l'ortogonalità del generico vettore (x, y, z, t) con i due vettori dati si ricava l'equazione parametrica di ${}^{\perp}U$ e, da questa, una base per ${}^{\perp}U$. Un base siffatta è data da

$$\Big(\big((10-a)(10-b), -(10-b), -2(10-a), 0\big), \big(0, 10-b, -(10-a), (10-a)(10-b)\big)\Big).$$