Prova scritta dell'esame di GEOMETRIA E ALGEBRA T (Ing. Informatica)

Dopo aver indicato con a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del vostro numero di matricola (es.: matricola 1393571 $\implies$ $a = 7, b = 1$), $\boxed{\textbf{ponete } \alpha = a+1 \textbf{ e } \beta = b+1.}$ Rispondete UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i dati richiesti. **Non consegnate alcun altro foglio.** Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciatele in forma simbolica. Non sviluppate le potenze se non strettamente necessario.

16 gennaio 2024

Nome: **Matricola:** $\alpha =$ **,** $\beta =$

Esercizio 1 (4 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} \alpha x + y + z + 2u & = & \beta + 1 - k \\ x - z - 3u & = & 0 \\ -2x + ky - 2z + 3u & = & 3 \\ (\alpha - 1)x + (\beta + 1)y - 2z + 2u & = & 3 \end{cases}$$

RISPOSTA:

Se $k = \beta$, $Sol(\mathbf{S}_k) = \emptyset$ (non ci sono soluzioni); se $k \neq \beta$, $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 0$ (c'è una sola soluzione).

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 2\left(\alpha^2 + \alpha\beta - \alpha - \beta\right) = 2(\alpha - 1)(\alpha + \beta)$.

Esercizio 3 (5 punti) Calcolare una base ortogonale per il nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$T(x, y, z, u) = \left(\alpha x + \alpha y + u, 0, 0, \beta z + \beta u\right).$$

RISPOSTA: $((1, -1, 0, 0), (1, 1, 2\alpha, -2\alpha))$.

Esercizio 4 (5 punti) Dire per quali valori del parametro reale k risulta semplice l'endomorfismo F_k di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata (rispetto alla base canonica) è

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 - \alpha \\ 0 & 11 - \beta & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: per tutti e soli i $k > 0$.

Esercizio 5 (4 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base in $\mathbb{R}^3$ dalla base

$$\mathcal{B}_1 = \big((1, 1, 1), (1, 1, 0), (11 - \alpha, 0, 0)\big)$$

alla base

$$\mathcal{B}_2 = \big((0, 0, 11 - \beta), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\big).$$

RISPOSTA: La matrice del cambiamento di base è $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{11-\beta} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 11 - \alpha \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (3 punti) Dire per quali valori del parametro t esiste la matrice inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11-\alpha & t & t & t \\ t & 11-\beta & t & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: L'inversa di A esiste se e solo se $t \neq 11-\alpha, 11-\beta$.

Esercizio 7 (4 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ definito ponendo

$$f(x,y) = \big(x + (11-\alpha)^2 y, (11-\beta)^2 x + y\big).$$

RISPOSTA: Una base spettrale è $\big((11-\alpha, 11-\beta), (\alpha-11, 11-\beta)\big)$.

Esercizio 8 (4 punti) Dati la retta di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x + (1-\alpha-\beta)y + z + \sqrt{\alpha+\beta-1} = 0 \\ 2x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

e il piano di equazione cartesiana

$$9x - k^2 y + 9z + 3k = 0,$$

determinare per quali valori di k essi sono paralleli e disgiunti e quando il piano contiene la retta.

RISPOSTA: Se $k = 3\sqrt{\alpha+\beta-1}$, il piano contiene la retta. Se $k = -3\sqrt{\alpha+\beta-1}$, il piano e la retta sono paralleli e disgiunti. Per ogni altro valore di k il piano e la retta non sono fra loro paralleli.

Esercizio 9 (5 punti) Si trovi la matrice associata (rispetto alla base canonica) di un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che <u>non</u> sia semplice e ammetta $(\alpha, \beta, 0)$ come autovettore associato all'autovalore α.

RISPOSTA: Una matrice del tipo richiesto è

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$
