Prova scritta dell'esame di GEOMETRIA E ALGEBRA T (Ing. Informatica)

Dopo aver indicato con a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del vostro numero di matricola (es.: matricola 1393571 $\implies$ $a = 7, b = 1$), $\boxed{\textbf{ponete } \alpha = a + 1 \textbf{ e } \beta = b + 1.}$ Rispondete UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i dati richiesti. **Non consegnate alcun altro foglio.** Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciatele in forma simbolica. Non sviluppate le potenze se non strettamente necessario.

30 gennaio 2024

Nome: **Matricola:** $\alpha =$ **,** $\beta =$

Esercizio 1 (4 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il vettore $(k, -1, 1-\beta, \alpha-2-k)$ può essere espresso come combinazione lineare dei vettori $(\alpha, 1, 1, -1)$, $(0, 2, \beta, 1)$, $(\alpha, 3, \beta+1, 0)$ in $\mathbb{R}^4$.

RISPOSTA: Solo per $k = \alpha$.

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 2\alpha\beta - 2$.

Esercizio 3 (4 punti) Calcolare una base ortogonale per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$T(x, y, z, u) = \big(x+(12-\alpha)y+2z+3u, -x+(10-\beta)y-2z-3u, x+(\alpha-10)y+2z+3u, -x+(\beta-12)y-2z-3u\big).$$

RISPOSTA: Una base ortogonale è $((1, -1, 1, -1), (11-\alpha, 11-\beta, \alpha-11, \beta-11))$.

Esercizio 4 (5 punti) Dire per quali valori del parametro reale k risulta semplice l'endomorfismo F_k di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata (rispetto alla base canonica) è

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & k \\ 2\alpha & 0 & 2\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: F_k è semplice se e solo se $k = \beta$.

Esercizio 5 (4 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base in $\mathbb{R}^3$ dalla base

$$\mathcal{B}_1 = \big((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, \alpha)\big)$$

alla base

$$\mathcal{B}_2 = \big((\beta, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\big).$$

RISPOSTA: La matrice del cambiamento di base è $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\beta} & -\frac{\alpha}{\beta} \\ 0 & \frac{\beta-1}{\beta} & \frac{\alpha}{\beta} \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (4 punti) Dire per quali valori del parametro t la seguente funzione è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$:

$$f\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - t & 1 \\ 1 & \beta - t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: Per $t < \frac{\alpha+\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + 1}$ (solo in questo caso la matrice $\begin{pmatrix} \alpha - t & 1 \\ 1 & \beta - t \end{pmatrix}$ ha traccia e determinante positivi).

Esercizio 7 (4 punti) Calcolare gli autovalori e gli autovettori dell'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ definito ponendo

$$f(x,y) = \left(2\alpha x + \frac{\alpha^2}{\beta}y, -\beta x\right).$$

RISPOSTA: L'unico autovalore è α e il suo autospazio è generato dal vettore $(\alpha, -\beta)$.

Esercizio 8 (4 punti) Determinare un'equazione parametrica di una retta di $\mathbb{R}^3$ che passi per il punto $(\alpha, \beta, 0)$ e sia ortogonale alla retta di equazione cartesiana $\begin{cases} (11-\beta)x - (11-\alpha)z = 5 \\ y = 1 \end{cases}$ e alla retta di equazione parametrica $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t-7 \\ z = t+3 \end{cases}$.

RISPOSTA: $\begin{cases} x = & (\beta-11)t & +\alpha \\ y = & (\alpha-\beta)t & +\beta \\ z = & (11-\alpha)t \end{cases}$. N.B.: La prima retta ha numeri direttori $(11-\alpha, 0, 11-\beta)$.

Esercizio 9 (5 punti) Determinare per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ è simile alla matrice $\begin{pmatrix} 2\alpha & t \\ t & 0 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: Se $\alpha \leq \beta$ le due matrici sono simili per $t = \pm\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$, perché in tal caso sono entrambe diagonalizzabili (in quanto simmetriche) e hanno gli stessi autovalori (in quanto hanno la stessa traccia e lo stesso determinante). Se $\alpha > \beta$ non esistono t reali per cui le due matrici siano simili, perché in tal caso le due matrici hanno determinante diverso per qualsiasi $t \in \mathbb{R}$.
