Prova scritta dell'esame di GEOMETRIA E ALGEBRA T (Ing. Informatica)

Dopo aver indicato con a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del vostro numero di matricola (es.: matricola 1393571 $\implies$ $a = 7, b = 1$), $\boxed{\textbf{ponete } \alpha = a + 1 \textbf{ e } \beta = b + 1.}$ Rispondete UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i dati richiesti. **Non consegnate alcun altro foglio.** Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciatele in forma simbolica. Non sviluppate le potenze se non strettamente necessario.

14 febbraio 2024

Nome: **Matricola:** $\alpha =$, $\beta =$

Esercizio 1 (5 punti) Si consideri la trasformazione lineare $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T_k(x, y, z, u) = \Big(kx + \beta y + z + (k+1)u, \quad k^2 y + \alpha^2 z + \alpha^2 u, \quad y + z + u\Big)$$

e si calcolino $\dim(\text{Im } T_k)$ e $\dim(\ker T_k)$ al variare del parametro reale k.

RISPOSTA:

$\dim(\text{Im } T_k) = 3$ se $k \notin \{0, \alpha, -\alpha\}$ e $\dim(\text{Im } T_k) = 2$ altrimenti.

$\dim(\ker T_k) = 1$ se $k \notin \{0, \alpha, -\alpha\}$ e $\dim(\ker T_k) = 2$ altrimenti.

Esercizio 2 (4 punti) Calcolare i valori del parametro reale t per i quali la seguente matrice risulta invertibile:

$$A_t = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & t \\ \alpha^2 & t & 0 & \beta^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $t \neq \pm 2\beta$.

Esercizio 3 (4 punti) Calcolare una base ortogonale per il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana

$$(4\beta^2 - 2\alpha\beta + 1)x + (\alpha + 2\beta)y + (\alpha^2 - 2\alpha\beta + 1)z = 0.$$

RISPOSTA: Una base ortogonale è $\big((\alpha, -1, 2\beta), (1, \alpha - 2\beta, -1)\big)$.

Esercizio 4 (5 punti) Dire per quali valori del parametro reale k risulta semplice l'endomorfismo F_k di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata (rispetto alla base canonica) è

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 - \alpha \\ 0 & k & 1 \\ 11 - \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: F_k è semplice se e solo se $k \neq \pm\sqrt{(11 - \alpha)(11 - \beta)}$.

Esercizio 5 (2 punti) Dire per quali valori del parametro reale k questa tripla di vettori è una base di $\mathbb{R}^3$:

$$\Big((\alpha, 1, k), (-1, 0, \beta), (\alpha, \beta, 1)\Big).$$

RISPOSTA: Lo è se e solo se $k \neq \alpha(1 - \beta) + \frac{1}{\beta}$.

Esercizio 6 (2 punti) Dire per quali valori del parametro t la seguente funzione è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$:

$$f\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 - \alpha & t \\ 11 - \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: Caso $(11 - \beta)^2 < 11 - \alpha$: per $t = 11 - \beta$. Caso $(11 - \beta)^2 \geq 11 - \alpha$: per nessun t. (Solo in questi casi la matrice $\begin{pmatrix} 11 - \alpha & t \\ 11 - \beta & 1 \end{pmatrix}$ è simmetrica e ha traccia e determinante positivi).

Esercizio 7 (5 punti) Calcolare gli autovalori e gli autovettori dell'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice $\begin{pmatrix} -3\alpha\beta-2 & 3\alpha\beta+3 \\ -2\alpha\beta-2 & 2\alpha\beta+3 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: Autovalori: $-\alpha\beta, 1$. L'autospazio $V_{-\alpha\beta}$ è generato dal vettore $(3,2)$. L'autospazio V_1 è generato dal vettore $(1,1)$.

Esercizio 8 (4 punti) Determinare per quali valori del parametro reale k la retta di equazione cartesiana $\begin{cases} (11-\alpha)x-(11-\beta)z=7 \\ y=1 \end{cases}$ è parallela al piano di equazione cartesiana $x+y+kz=4$.

RISPOSTA: $k=-\frac{11-\beta}{11-\alpha}$. N.B.: La prima retta ha numeri direttori $(11-\beta, 0, 11-\alpha)$.

Esercizio 9 (5 punti) Calcolare, utilizzando la diagonalizzazione di matrici, $\begin{pmatrix} -3\alpha\beta-2 & 3\alpha\beta+3 \\ -2\alpha\beta-2 & 2\alpha\beta+3 \end{pmatrix}^{2024}$.
(NB: non sviluppare le potenze (per esempio, non scrivere 1024 ma 2^{10})).

RISPOSTA: $\begin{pmatrix} 3(\alpha\beta)^{2024}-2 & -3(\alpha\beta)^{2024}+3 \\ 2(\alpha\beta)^{2024}-2 & -2(\alpha\beta)^{2024}+3 \end{pmatrix}$.

N.B.: $\begin{pmatrix} -3\alpha\beta-2 & 3\alpha\beta+3 \\ -2\alpha\beta-2 & 2\alpha\beta+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.
