Prova scritta dell'esame di GEOMETRIA E ALGEBRA T (Ing. Informatica)

Dopo aver indicato con a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del vostro numero di matricola (es.: matricola 1393571 $\implies$ $a = 7, b = 1$), $\boxed{\textbf{ponete } \alpha = a + 1 \textbf{ e } \beta = b + 1.}$ Rispondete UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i dati richiesti. **Non consegnate alcun altro foglio.** Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciatele in forma simbolica. Non sviluppate le potenze se non strettamente necessario.

11 giugno 2024

Nome: **Matricola:** $\alpha =$ **,** $\beta =$

Esercizio 1 (4 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il vettore $(2 - \alpha, 0, \beta + k, \beta - 3 - k)$ può essere espresso come combinazione lineare dei vettori $(1, 1, \beta, -1)$, $(\alpha, 2, 0, 1)$, $(\alpha + 1, 3, \beta, 0)$ in $\mathbb{R}^4$.

RISPOSTA: Solo per $k = \beta$.

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & \beta \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 4 - 4\alpha\beta$.

Esercizio 3 (4 punti) Calcolare una base ortogonale per il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana (nelle variabili x, y, z, u) $\begin{cases} x + \alpha y + \beta z + u = 0 \\ x + \alpha y + \beta z = 0 \end{cases}$

RISPOSTA: Una base ortogonale è $\big((\alpha, -1, 0, 0), (\beta, \alpha\beta, -\alpha^2 - 1, 0)\big)$.

Esercizio 4 (5 punti) Dire per quali valori del parametro reale k risulta semplice l'endomorfismo F_k di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata (rispetto alla base canonica) è

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: F_k è semplice se e solo se $k \neq \alpha$.

Esercizio 5 (4 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base in $\mathbb{R}^3$ dalla base

$$\mathcal{B}_1 = \big((\beta, \beta, 0), (0, 0, \alpha\beta), (\beta, 0, \beta)\big)$$

alla base

$$\mathcal{B}_2 = \big((0, 1, 0), (1, 0, 1), (\beta, 1, 0)\big).$$

RISPOSTA: La matrice del cambiamento di base è $\begin{pmatrix} \beta - 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha\beta & \beta \\ 1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (4 punti) Dire per quali valori del parametro t la seguente funzione è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$:

$$f\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - t & \beta \\ \beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: Per $t < \alpha - \beta$ (solo in questo caso la matrice simmetrica $\begin{pmatrix} \alpha - t & \beta \\ \beta & \beta \end{pmatrix}$ ha traccia e determinante positivi).

Esercizio 7 (4 punti) Calcolare gli autovalori e gli autovettori dell'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$f(x, y, z) = (-\beta x + \alpha y, \alpha y, \beta x)\,.$$

RISPOSTA: Autovalori: $0, \alpha, -\beta$. Autospazio $V_0 = \langle(0, 0, 1)\rangle$. Autospazio $V_\alpha = \langle(\alpha, \alpha + \beta, \beta)\rangle$. Autospazio $V_{-\beta} = \langle(1, 0, -1)\rangle$.

Esercizio 8 (4 punti) Determinare un'equazione parametrica della retta di $\mathbb{R}^3$ che passa per il punto $(0, \alpha, \beta)$ ed è parallela ai piani di equazioni cartesiane $\alpha x + y = 1$ e $\beta y + z = \alpha$.

RISPOSTA: $\begin{cases} x = t \\ y = -\alpha t + \alpha \\ z = \alpha\beta t + \beta \end{cases}$

Esercizio 9 (5 punti) Determinare per quali $s, t \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} s & t \\ t & s \end{pmatrix}$ è simile alla matrice $\begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: La matrice $\begin{pmatrix} s & t \\ t & s \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile e quindi è simile a $B = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix}$ (che è già diagonale) se e solo se ha la stessa traccia e lo stesso determinante di B, dunque se e solo se $\begin{cases} 2s = 2\alpha + 2\beta \\ s^2 - t^2 = 4\alpha\beta \end{cases}$ cioè se e solo se $s = \alpha + \beta$ e $t = \pm(\alpha - \beta)$.
