24 luglio 2008

NOME:
MATRICOLA: $\Rightarrow a = \quad , b = \quad , c =$

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.**

`ESERCIZIO 1` *(3 punti)*

Data la matrice $A_t = \begin{pmatrix} c+1 & 10-c & 0 & c-10 & 0 & a+1 \\ 0 & b+1 & 3t & -(b+1) & t & 0 \\ 0 & t & 3(b+1) & -t & b+1 & 0 \end{pmatrix}$ e considerata la trasformazione lineare $T_t : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ di equazione $(y) = A_t(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim \operatorname{Ker} T_t$ e $\dim \operatorname{Im} T_t$ al variare del parametro reale t.

RISPOSTA: Se $t \neq \pm(b+1)$ $\boxed{\dim \operatorname{Ker} T_t = 3, \dim \operatorname{Im} T_t = 3}$. Se $t = \pm(b+1)$ $\boxed{\dim \operatorname{Ker} T_t = 4, \dim \operatorname{Im} T_t = 2}$.

`ESERCIZIO 2` *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, u ammette soluzione e in tali casi determinare qual è la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (11-b)x + y + z - u = t \\ x + (11-c)y + z - u = 1 \\ x + y + (11-a)z - u = 1 \\ tx + y + z - u = 1 \end{cases}$$

RISPOSTA: ammette soluzione se e solo se $t \neq 11 - b$. In tal caso la dimensione dello spazio delle soluzioni è 0 (una sola soluzione).

`ESERCIZIO 3` *(1 punto)*

Si calcoli l'inversa della seguente matrice: $\begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 1 & b+1 & 0 \\ 1 & 1 & c+1 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $\frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)} \begin{pmatrix} (b+1)(c+1) & 0 & 0 \\ -(c+1) & (a+1)(c+1) & 0 \\ -b & -(a+1) & (a+1)(b+1) \end{pmatrix}$.

`ESERCIZIO 4` *(2 punti)*

Trovare una base per lo spazio vettoriale delle matrici X reali 2×2 tali che XA sia la matrice nulla, dove $A = \begin{pmatrix} 10-c \\ 7-a \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $\left\{ \begin{pmatrix} a-7 & 10-c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a-7 & 10-c \end{pmatrix} \right\}$.

(girare il foglio)

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 5}}$ *(3 punti)*

Si calcoli una base spettrale per l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata, rispetto alla base canonica, è $\begin{pmatrix} b+1 & 0 & (10-c)^2 \\ 0 & a-20 & 0 \\ 1 & 0 & b+1 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: una possibile base spettrale è $\{(10-c,0,1),(c-10,0,1),(0,1,0)\}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 6}}$ *(1 punto)*

Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ che contenga i vettori $(a+1,11,c+1)$ e $(11,b+1,a+1)$.

RISPOSTA: $\Big((a+1,11,c+1),(11,b+1,a+1),\big(0,0,1\big)\Big)$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 7}}$ *(2 punti)*

Scrivere un'equazione parametrica della retta di $\mathbb{R}^3$ passante per (a,b,c), parallela al piano di equazione cartesiana $y+(10-b)z=c+1$ e ortogonale alla retta di equazione parametrica $x=t, y=t, z=a+1$.

RISPOSTA: $\begin{cases} x = & (b-10)t+a \\ y = & (10-b)t+b \\ z = & -t+c \end{cases}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 8}}$ *(3 punti)*

Determinare per quali valori del parametro reale t il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ è linearmente **dipendente**:

$$\{(1,2,b+1,1),(b+3,c+4,0,2-a),(b+1,c,t,-a)\}.$$

RISPOSTA: $t=-2(b+1)$.