Prova scritta dell'esame di GEOMETRIA E ALGEBRA T (Ing. Informatica)

Dopo aver indicato con a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del vostro numero di matricola (es.: matricola 1393571 $\implies a = 7, b = 1$), **ponete** $\alpha = a + 1$ e $\beta = b + 1$. Rispondete UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i dati richiesti. **Non consegnate alcun altro foglio.** Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciatele in forma simbolica. Non sviluppate le potenze se non strettamente necessario.

26 luglio 2024

Nome:

Matricola:

$\alpha =$, $\beta =$

Esercizio 1 (4 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z ammette soluzione, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} \alpha x + y - z & = 2 \\ x + ky + z & = 0 \\ \beta y + z & = 1 \\ (\alpha + 1)x + z & = 3 \end{cases}$$

RISPOSTA:

Se $k = -\beta - 1$, $\dim \text{Sol}(\mathbf{S}_k) = 0$ (c'è una sola soluzione). Se $k \neq -\beta - 1$, $\text{Sol}(\mathbf{S}_k) = \emptyset$ (non ci sono soluzioni).

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 2\alpha \\ 0 & \beta & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 1 - \alpha\beta$.

Esercizio 3 (4 punti) Calcolare una base ortogonale per il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana (nelle variabili x, y, z, u)
$$\begin{cases} \beta x + y + \alpha z + u = 0 \\ \beta x + y + \alpha z = 0 \end{cases}$$

RISPOSTA: Una base ortogonale è $((-1, \beta, 0, 0), (\alpha\beta, \alpha, -\beta^2 - 1, 0))$.

Esercizio 4 (5 punti) Dire per quali valori del parametro reale k risulta semplice l'endomorfismo F_k di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata (rispetto alla base canonica) è

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 0 & 2\beta \\ -k & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: F_k è semplice se e solo se $k = -\alpha$.

Esercizio 5 (4 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base in $\mathbb{R}^3$ dalla base

$$\mathcal{B}_1 = ((0, \alpha, \alpha), (\alpha\beta, 0, 0), (\alpha, 0, \alpha))$$

alla base

$$\mathcal{B}_2 = ((0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, \alpha)).$$

RISPOSTA: La matrice del cambiamento di base è
$$\begin{pmatrix} \alpha - 1 & \beta & 0 \\ 0 & \alpha\beta & \alpha \\ 1 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6 (4 punti) Dire per quali valori del parametro t la seguente funzione è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta + t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: Per $t > \alpha - \beta$ (solo in questo caso la matrice simmetrica $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta + t \end{pmatrix}$ ha traccia e determinante positivi).

Esercizio 7 (4 punti) Calcolare gli autovalori e gli autovettori dell'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ definito ponendo

$$f(x, y) = \left(-\alpha y, \frac{\beta^2}{\alpha} x + 2\beta y \right).$$

RISPOSTA: L'unico autovalore è β e il suo autospazio è generato dal vettore $(\alpha, -\beta)$.

Esercizio 8 (4 punti) Determinare un'equazione parametrica di una retta di $\mathbb{R}^3$ che passi per il punto $(\alpha, 1, \beta)$ e sia ortogonale alla retta di equazione cartesiana $\begin{cases} (11 - \alpha)y - (11 - \beta)z = 3 \\ x = -2 \end{cases}$ e alla retta

di equazione parametrica $\begin{cases} x = -t + 7 \\ y = -t \\ z = -t - 1 \end{cases}$.

RISPOSTA: $\begin{cases} x = (\beta - \alpha)t + \alpha \\ y = (\alpha - 11)t + 1 \\ z = (11 - \beta)t + \beta \end{cases}$. N.B.: La prima retta ha numeri direttori $(0, 11 - \beta, 11 - \alpha)$.

Esercizio 9 (5 punti) Dire se esistono matrici diagonali che siano simili alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2\alpha - \beta - 1 & -\alpha - \beta - 1 \\ 2\alpha + 2\beta + 2 & \alpha + 2\beta + 2 \end{pmatrix}$$

e, in caso affermativo, calcolarle.

RISPOSTA: Sì, esistono e sono le due matrici $\begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & \beta + 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \beta + 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico della matrice A è $\lambda^2 + (\alpha - \beta - 1)\lambda - \alpha(\beta + 1)$.