25 Luglio 2007

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1)

a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, u

$$\begin{cases} (a+1)x & -y & +3z & -bu & = & 2 \\ (a+1)x & -y & +(2t-a+2)z & -bu & = & 2 \\ & (t+b+1)y & & +(2-t)u & = & 1 \\ & -2(t+b+1)y & & +(a-3)u & = & -2 \end{cases}$$

al variare del parametro reale t, dicendo per quali valori di t esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni. *(6 punti)*

b) Si ponga $\alpha = a+1$ e $\beta = b+1$. Si scriva la matrice associata, rispetto alla base canonica, ad una trasformazione lineare $T : I\!R^4 \to I\!R^3$ scelta a piacere tra quelle per cui $Im(T) = U$, dove $U = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid \alpha\beta x - \beta y - \alpha z = 0\}$. *(3 punti)*

2) Si ponga $\alpha = 10 - a$ e $\beta = 10 - b$.

a) Si consideri l'endomorfismo $T_k : I\!R^3 \to I\!R^3$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ dove

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha & k & -k \\ 0 & -\beta & 0 \\ -k & (\alpha+\beta) & \alpha \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo T_k è diagonalizzabile. *(6 punti)*

b) Si calcoli una base per il complemento ortogonale del sottospazio di $I\!R^4$ dato da

$$U = L(\{(\alpha, 0, -1, 1), (0, \beta, 0, -1)\}).$$

(3 punti)

SOLUZIONI:

1a) La matrice incompleta e completa associate al sistema sono rispettivamente

$$A_t = \begin{pmatrix} (a+1) & -1 & 3 & -b \\ (a+1) & -1 & (2t-a+2) & -b \\ 0 & (t+b+1) & 0 & 2-t \\ 0 & -2(t+b+1) & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

e

$$C_t = \begin{pmatrix} (a+1) & -1 & 3 & -b & 2 \\ (a+1) & -1 & (2t-a+2) & -b & 2 \\ 0 & (t+b+1) & 0 & 2-t & 1 \\ 0 & -2(t+b+1) & 0 & a-3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Se $t \neq -(b+1), \frac{a+1}{2}$ risulta $\rho(A_t) = \rho(C_t) = 4$ e dim(Sol(S))=0 (una sola soluzione).
Se $t = -(b+1)$ risulta $\rho(A_{-(b+1)}) = 3 \neq 4 = \rho(C_{-(b+1)})$ e dunque $Sol(S) = \emptyset$.
Se $t = \frac{a+1}{2}$ risulta $\rho(A_{\frac{a+1}{2}}) = \rho(C_{\frac{a+1}{2}}) = 2$ e dim(Sol(S))=2.

1b) Una possibile soluzione è data dalla trasformazione lineare T associata alla matrice

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2a) Il polinomio caratteristico è $p(t) = (t+\beta)((t-\alpha)^2 - k^2)$. Gli autovalori sono $-\beta, \alpha+k, \alpha-k$.
Se $k \neq 0, -(\alpha+\beta), \alpha+\beta$ si hanno tre autovalori distinti e quindi A_k è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = \alpha + \beta$ abbiamo che $ma(2\alpha + \beta) = mg(2\alpha + \beta) = 1$ e $ma(-\beta) = 2 \neq 1 = mg(-\beta)$ e dunque $A_{\alpha+\beta}$ non è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = -(\alpha + \beta)$ abbiamo che $ma(2\alpha + \beta) = mg(2\alpha + \beta) = 1$ e $ma(-\beta) = 2 \neq 1 = mg(-\beta)$ e dunque $A_{-(\alpha+\beta)}$ non è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = 0$ abbiamo che $ma(\alpha) = mg(\alpha) = 2$ e $ma(-\beta) = mg(-\beta) = 1$, quindi A_0 è diagonalizzabile per similitudine.

2b) Una base per ${}^{\perp}U$ è $\{(1, 0, \alpha, 0), (0, 1, \beta, \beta)\}$.