27/6/2003

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1)
a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, u

$$\begin{cases} 3x & & +6z & -3u & = & 3 \\ x & +(a+1-t)y & +2z & -u & = & 1 \\ -x & +(t+b+1)y & +(t+b-1)z & +u & = & t+b \\ x & & +2z & +\big(t^2-(a+1)t-1\big)u & = & 2 \end{cases}$$

al variare del parametro reale t, dicendo per quali valori di t esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni. *(6 punti)*

b) Si trovi una base ortogonale (rispetto al prodotto scalare standard) per il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai tre vettori $(a+1, b+1, 1, 3)$, $(0, 0, 1, -2)$ e $(a+1, b+1, 0, 1)$. *(3 punti)*

2) Dato l'endomorfismo T_t da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A_t(x)$ dove

$$A_t = \begin{pmatrix} 2a+2 & 0 & t \\ 0 & 0 & 2b+2 \\ t & 0 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

a) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice A_t risulta diagonalizzabile per similitudine sul campo dei reali. *(5 punti)*

b) Si scelga un valore $\bar{t}$ per il quale $A_{\bar{t}}$ risulti diagonalizzabile per similitudine e si calcolino una base spettrale per $T_{\bar{t}}$ ed una forma diagonale di $A_{\bar{t}}$. *(4 punti)*

SOLUZIONI

1)
a) Dette rispettivamente A_t e C_t la matrice completa e incompleta del sistema si ha
$\rho(A_t) = 2$ e $\rho(C_t) = 3$ se $t = a+1$ (nessuna soluzione),
$\rho(A_t) = 3$ e $\rho(C_t) = 3$ se $t = -(b+1)$ (∞^1 soluzioni),
$\rho(A_t) = 3$ e $\rho(C_t) = 4$ se $t = 0$ (nessuna soluzione),
$\rho(A_t) = \rho(C_t) = 4$ in tutti gli altri casi (una soluzione).

b) Una base come quella richiesta è $B = \big((a+1, b+1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\big)$.

2)
a) Poniamo $\alpha = 2a+2$ e $\beta = 2b+2$. Il polinomio caratteristico è dato da $\lambda((\lambda-\alpha)^2 - t^2)$. Gli autovalori sono dunque 0, $\alpha+t$ e $\alpha-t$. Se $t \neq 0, \alpha, -\alpha$ abbiamo tre autovalori distinti e A_t risulta diagonalizzabile per similitudine. Per $t = 0$ risulta $mg(\alpha) = ma(\alpha) = 2$ e quindi A_t risulta diagonalizzabile per similitudine. Per $t = \alpha, -\alpha$ risulta $mg(0) = 1 < ma(0) = 2$ e quindi A_t risulta non diagonalizzabile per similitudine.

b) Scelgo $\bar{t} = 1$. Una base spettrale per $T_{\bar{t}}$ e' $(\alpha+1, \beta, \alpha+1), (1-\alpha, \beta, \alpha-1), (0, 1, 0))$. Una forma diagonale per $A_{\bar{t}}$ e'

$$\begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$