27 luglio 2005

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1) Data la trasformazione lineare T_t da $\mathbf{R}^5$ a $\mathbf{R}^4$ di equazione matriciale $(y) = A_t(x)$ dove

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & t-a+4 & -1 & -5 \\ 0 & t+b+3 & 2t-a+b & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -t-a+9 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare le dimensioni di $Ker\ T_t$ e $Im\ T_t$ al variare del parametro reale t. (5 punti)
b) Calcolare una base di $Ker\ T_t$ nel caso $t = 3$. (4 punti)

2) Si ponga $\alpha = a + 1$ e $\beta = b + 1$. Dato l'endomorfismo T da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A(x)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 2-\alpha & -\frac{(\alpha+\beta)}{2} & -(\alpha+\beta) \\ 0 & 2+\beta & 2(\alpha+\beta) \\ 0 & \frac{1}{2} & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

a) Calcolare (dopo aver verificato che A risulta diagonalizzabile) una base spettrale per A. (5 punti)
b) Si calcoli una base per il complemento ortogonale del sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(11-\alpha, 1, 2, -3)$ e $(\beta, 0, -1, 4)$. (4 punti)

SOLUZIONI

1)
a) Se $t = 3$ oppure $t = 2 - b$ allora $\dim(ImT_t) = 3$ e $\dim(KerT_t) = 2$. In caso contrario $\dim(ImT_t) = 4$ e $\dim(KerT_t) = 1$.
b) Una base per $KerT_t$ nel caso $t = 3$ è $\{(3(1-a), 1, -1, 0, -a), (-7, 0, 0, 1, -3)\}$.

2)
a) Gli autovalori sono $2 - \alpha$ (di molteplicità algebrica e geometrica 2) e $3 + \beta$ (di molteplicità algebrica e geometrica 1). Una base spettrale per A è $\{(1, 0, 0), (0, -2, 1), (-(\alpha+\beta), 2(\alpha+\beta), 1)\}$.
b) Una base per il complemento ortogonale è $\{(1, -(11-\alpha+2\beta), \beta, 0), (0, -5, 4, 1)\}$.