28 marzo 2006

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 163571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1)

a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, u, w

$$\begin{cases} x & -2y & +tz & +u & +2w & = & 2 \\ x & +y & +bz & +au & +3w & = & -3 \\ x & -5y & & +(2-a)u & +w & = & t+b \\ 2x & -y & +(t+b)z & +(t+2a+2)u & +5w & = & -1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale t, dicendo per quali valori di t esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni. *(5 punti)*

b) Si scriva la matrice associata, rispetto alla base canonica, ad una trasformazione lineare $T : I\!R^4 \to I\!R^4$ scelta a piacere tra quelle per cui $Ker(T) = U$, dove

$$U = \{(x, y, z, t) \in I\!R^4 \mid x - (a+1)t = 0, y - (10-b)z = 0\} .$$

(4 punti)

2)

a) Si ponga $\alpha = 10 - a$ e $\beta = b + 1$. Si consideri l'endomorfismo $T_k : I\!R^3 \to I\!R^3$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ dove

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha & -\alpha \\ \beta & 2\beta & -\beta \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo T_k è diagonalizzabile. *(5 punti)*

b) Scrivere le equazioni parametriche della retta di $I\!R^3$ ortogonale alle rette $r : \begin{cases} x - (10-a)z = 10 - a \\ y = 0 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x = 0 \\ (10-b)y + z = 10 - b \end{cases}$ e passante per il punto P di coordinate $(0, 0, 0)$, rispetto al riferimento cartesiano naturale. *(4 punti)*

SOLUZIONI:

1a) La matrice incompleta e completa associate al sistema sono rispettivamente

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & t & 1 & 2 \\ 1 & 1 & b & a & 3 \\ 1 & -5 & 0 & (2-a) & 1 \\ 2 & -1 & (t+b) & (t+2a+2) & 5 \end{pmatrix}.$$

e

$$C_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & t & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & b & a & 3 & -3 \\ 1 & -5 & 0 & (2-a) & 1 & t+b \\ 2 & -1 & (t+b) & (t+2a+2) & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se $t \neq \frac{b}{2}, -(a+1)$ risulta $\rho(A_t) = \rho(C_t) = 4$ e dim(Sol(S))=1; se $t = \frac{b}{2}$ risulta $\rho(A_t) = 3 \neq 4 = \rho(C_t)$ e dunque $Sol(S) = \emptyset$; se $t = -(a+1)$ risulta $\rho(A_t) = \rho(C_t) = 3$ e dim(Sol(S))=2.

1b) Una possibile soluzione è

$$A(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -(a+1) \\ 0 & 1 & -(10-b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2a) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda(k - \lambda)(\lambda - \alpha - 2\beta)$. Gli autovalori sono $0, k, \alpha + 2\beta$.
Se $k \neq 0, \alpha + 2\beta$ si hanno tre autovalori distinti e quindi A_k è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = 0$ abbiamo che $ma(0) = mg(0) = 2$ e $ma(\alpha + 2\beta) = mg(\alpha + 2\beta) = 1$ e dunque A_0 è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = \alpha + 2\beta$ abbiamo che $ma(0) = mg(0) = 1$ e $ma(\alpha + 2\beta) = 2 \neq 1 = mg(\alpha + 2\beta)$, quindi $A_{\alpha+2\beta}$ non è diagonalizzabile per similitudine.

2b) Delle equazioni parametriche per la retta cercata sono

$$u : \left\{ \begin{array}{cc} x & = t \\ y & = -(10-a)(10-b)t \\ z & = -(10-a)t \end{array} \right. , \; t \in I\!R \; .$$