28 giugno 2005

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1)

a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, u

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & +u & = & t-a+2 \\ 2x & +(t-a+3)y & +6z & +(a-t+3)u & = & 4 \\ 2x & +y & +(t-b+1)z & -u & = & 2 \\ x & -y & +(2t-3)z & -2u & = & a-t \end{cases}$$

al variare del parametro reale t, dicendo per quali valori di t esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni. *(6 punti)*

b) Si scriva la matrice associata, rispetto alla base canonica, ad una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ scelta a piacere tra quelle per cui $Im(T) = U$, dove

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (10-a)x + y - (10-b)z = 0\} .$$

(3 punti)

2)

a) Si consideri l'endomorfismo $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ dove

$$A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & 1 \\ 0 & 2k+1 & 0 \\ 0 & 1 & a+b \end{pmatrix} .$$

Determinare per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo T_k è diagonalizzabile. *(6 punti)*

b) Scrivere un'equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ contenente la retta $r : \begin{cases} x-(a+1)y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$ e passante per il punto P di coordinate $(0, 0, b+1)$, rispetto al riferimento cartesiano naturale. *(3 punti)*

SOLUZIONI

1)

a) Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa, rispettivamente.

Caso $(a, b) \neq (0, 0)$:
per $t \neq 1-b, a+1$ si ha $\rho(A) = \rho(C) = 4$ e dunque lo spazio delle soluzioni ha dimensione $4-4 = 0$ (una sola soluzione);
per $t = 1-b$ si ha $\rho(A) = \rho(C) = 3$ e dunque lo spazio delle soluzioni ha dimensione $4-3 = 1$;
per $t = 1+a$ si ha $\rho(A) = 3 \neq \rho(C) = 4$ e dunque non esistono soluzioni.

Caso $(a, b) = (0, 0)$:
per $t \neq 1$ si ha $\rho(A) = \rho(C) = 4$ e dunque lo spazio delle soluzioni ha dimensione $4-4 = 0$ (una sola soluzione);
per $t = 1$ si ha $\rho(A) = 2 \neq \rho(C) = 3$ e dunque non esistono soluzioni.

b) Una matrice verificante la condizione richiesta è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(10-a) & 10-b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

2)

a) L'endomorfismo è diagonalizzabile se e solo se $t \neq -3, a+b+2, (a+b-1)/2$.

b) Un'equazione cartesiana è data da $(b+2)x - (a+1)(b+2)y + z - (b+1) = 0$.