30/03/2004

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1)

a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z

$$\begin{cases} (2a+4-t)x & +2y & +(1-t^2)z & = & 1-t^2 \\ (3-2t)x & +(1-t)y & & = & b+t \\ 4x & +2y & +(1-t^2)z & = & 1-t^2 \end{cases}$$

al variare del parametro reale t, dicendo per quali valori di t esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni. *(6 punti)*

b) Si considerino in $I\!R^3$ i piani α e β di equazioni cartesiane $(10-a)x + y + z = 3$ e $2x + (a-10)y + (a-10)z = 2$, rispetto al riferimento cartesiano naturale. Si determini un'equazione cartesiana del piano passante per $(0,0,0)$ e ortogonale sia ad α che a β. *(3 punti)*

2) Si consideri l'endomorfismo $T : I\!R^3 \to I\!R^3$ di equazione matriciale $(y) = A(x)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ b+1 & a+2 & 0 \\ 0 & b+1 & a+3 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare se T è diagonalizzabile e, in caso affermativo, calcolare una base spettrale per T. *(5 punti)*

b) Calcolare una base ortogonale di ${}^{\perp}U$ sapendo che il sottospazio vettoriale $U \subset I\!R^3$ è generato dal vettore $(a+b, 1, 1)$. *(4 punti)*

SOLUZIONI

1)

a) Dette rispettivamente A_t e C_t la matrice completa e incompleta del sistema si ha

$\rho(A_t) = 2$ e $\rho(C_t) = 2$ se $t = 2a$ ($\dim Sol(S) = 3 - 2 = 1$),

$\rho(A_t) = 2$ e $\rho(C_t) = 3$ se $t = 1$ (nessuna soluzione),

$\rho(A_t) = 2$ e $\rho(C_t) = 2$ se $t = -1$ e $b = 1$ ($\dim Sol(S) = 3 - 2 = 1$), $\rho(A_t) = 2$ e $\rho(C_t) = 3$ se $t = -1$ e $b \neq 1$ (nessuna soluzione).

$\rho(A_t) = \rho(C_t) = 3$ in tutti gli altri casi ($\dim Sol(S) = 3 - 3 = 0$: una sola soluzione).

b) Un'equazione cartesiana del piano cercato è $y - z = 0$.

2)

a) Gli autovalori sono $a+1, a+2, a+3$: essendo tutti distinti T è diagonalizzabile.

L'autospazio di $a+1$ è generato dal vettore $(2, -2(b+1), (b+1)^2)$.

L'autospazio di $a+2$ è generato dal vettore $(0, 1, -(b+1))$.

L'autospazio di $a+3$ è generato dal vettore $(0, 0, 1)$.

Una base spettrale per T è quindi data da $\big((2, -2(b+1), (b+1)^2), (0, 1, -(b+1)), (0, 0, 1)\big)$.

b) Una base per ${}^{\perp}U$ come quella richiesta è data da $\big((0, 1, -1), (-2, a+b, a+b)\big)$.