31 marzo 2008

NOME:
MATRICOLA: $\Rightarrow a = \quad , b = \quad , c =$

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.**

`ESERCIZIO 1` *(3 punti)*

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 & 2c+2 & -2 \\ a+1 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & c+1 & b-3 \\ a & 1 & 6 & c & b-4 \end{pmatrix}$ e considerata la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ di equazione $(y) = A(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim \operatorname{Ker} T$ e $\dim \operatorname{Im} T$.

RISPOSTA: $\boxed{\dim \operatorname{Ker} T = 2, \dim \operatorname{Im} T = 3}$ per $b \neq 2$, $\boxed{\dim \operatorname{Ker} T = 3, \dim \operatorname{Im} T = 2}$ per $b = 2$.

`ESERCIZIO 2` *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, u ammette soluzione:

$$\begin{cases} (c+1)x + (c+1)y + cu = 0 \\ 4x + 2y - 2z = 0 \\ (t-a)x - y + z + (b+1)u = -t-2 \\ 2x + y - z - (b+1)u = -1 \end{cases}$$

RISPOSTA: ammette soluzione se e solo se $t \neq a - 2$.

`ESERCIZIO 3` *(1 punto)*

Si calcoli l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 0 & c+1 \\ a-11 & b+1 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $\frac{1}{(11-a)(c+1)} \begin{pmatrix} b+1 & -c-1 \\ 11-a & 0 \end{pmatrix}$.

`ESERCIZIO 4` *(2 punti)*

Scrivere una matrice reale 2×2 che non sia diagonalizzabile per similitudine e che abbia sulla diagonale principale i valori $a+1$ e $b+1$.

RISPOSTA: $\begin{pmatrix} a+1 & -1 \\ (a+b+2)^2 & b+1 \end{pmatrix}$.

(girare il foglio)

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 5}}$ *(3 punti)*

Si dica per quali valori del parametro reale k la matrice $\begin{pmatrix} k & 0 & c-3 \\ 0 & b+1 & 11-a \\ 0 & 1 & -(b+1) \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile per similitudine.

RISPOSTA: Se $c \neq 3$ la matrice è diagonalizzabile se e solo se $k \neq \pm\sqrt{(b+1)^2+11-a}$. Se $c = 3$ la matrice è diagonalizzabile per ogni valore di k.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 6}}$ *(1 punto)*

Calcolare il prodotto vettoriale $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, con $\mathbf{u} = (10-a, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, c+1, 0)$ (i vettori sono considerati nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale).

RISPOSTA: $(-(c+1), 1, (10-a)(c+1))$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 7}}$ *(2 punti)*

Scrivere un'equazione cartesiana del piano π passante per i punti $(1, 1, 10-a)$ e $(2, 1, 9-a)$, e ortogonale al piano di equazione cartesiana $(c-a)x + y + (10-c)z + b = 0$.

RISPOSTA: $x - (10-a)y + z - 1 = 0$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 8}}$ *(3 punti)*

Trovare una base per il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $\begin{cases} y-(b+1)z = 0 \\ (b+1)x - y + (a-11)(b+1)u = 0 \end{cases}$ (rispetto alle coordinate cartesiane (x, y, z, u)).

RISPOSTA: $\{(11-a, 0, 0, 1), (1, b+1, 1, 0)\}$.
