

ESERCIZIO 1. Dire se la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  è diagonalizzabile sul campo dei reali. Se lo è calcolare una base spettrale e la relativa forma diagonale di  $A$ .

---

**Svolgimento.** Calcoliamo il determinante della matrice caratteristica (cioè il polinomio caratteristico  $p(\lambda)$ ):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 3)^2 \cdot (\lambda + 1)$$

le cui radici sono, ovviamente, gli autovalori 3 e  $-1$ .

*N.B.: un'ingenuità classica è quella di moltiplicare i fattori del polinomio caratteristico, ottenendo un polinomio di cui non è più immediato calcolare le radici. Se il polinomio caratteristico "nasce" già fattorizzato non conviene moltiplicarne i fattori!*

La molteplicità algebrica  $ma(-1)$  dell'autovalore  $-1$  è 1, e quindi anche la molteplicità geometrica  $mg(-1)$  dell'autovalore  $-1$  è 1 (ricordate che risulta  $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$ , cf. Prop. 13.8 a pag. 258 del libro). Per quanto riguarda l'altro autovalore occorre invece fare qualche calcolo perché il valore della molteplicità geometrica di 3 non è ovvia. L'equazione dell'autospazio  $U_3$  di 3 è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con  $\lambda = 3$ . In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango  $r(A)$  di  $A$  è uguale a 1 (DEVE essere minore di 3!) La dimensione di  $U_3$  (cioè, per definizione,  $mg(3)$ ) risulta dunque uguale a  $n - r(A) = 3 - 1 = 2$  (cf. Oss. 13.7 a pag. 258 del libro). Dunque la somma  $mg(-1) + mg(3)$  delle molteplicità **geometriche** degli autovalori di  $A$  è uguale a  $1 + 2 = 3$  e  $A$  risulta diagonalizzabile (cf. Teor. 13.9 a pag. 259 del libro).

Calcoliamo ora una base spettrale per l'endomorfismo associato ad  $A$  rispetto alla base canonica. Per farlo occorre calcolare una base per  $U_{-1}$  ed una base di  $U_3$ , per poi unirle a formare la base spettrale cercata. Come già sappiamo l'equazione di  $U_3$  è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè  $4x + 4y + 8z = 0$ , ovvero  $x + y + 2z = 0$ . Una soluzione parametrica di tale equazione è

$$\begin{cases} x = -s - 2t \\ y = s \\ z = t \end{cases}.$$

In forma vettoriale possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che i due vettori  $(-1, 1, 0)$ ,  $(-2, 0, 1)$  sono linearmente indipendenti, costituiscono una base per  $U_3$  (che sappiamo già avere dimensione 2).

Ora dobbiamo calcolare una base per  $U_{-1}$ . L'equazione dell'autospazio  $U_{-1}$  di  $-1$  è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con  $\lambda = -1$ . In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

cioè

$$\begin{cases} -4x = 0 \\ 4x + 8z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases}.$$

Tale sistema lineare equivale al seguente (la seconda equazione è combinazione lineare delle altre due):

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Una soluzione parametrica di tale equazione è

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}.$$

In forma vettoriale possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi  $((0, 1, 0))$  costituisce una base per  $U_{-1}$ .

Una base spettrale per l'endomorfismo associato ad  $A$  rispetto alla base canonica è quindi data dalla terna  $((-1, 1, 0), (-2, 0, 1), (0, 1, 0))$ . Rispetto a tale base, l'endomorfismo definito dalla matrice  $A$  rispetto alla base canonica viene descritto dalla matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notate che l'ordine sulla diagonale degli autovalori corrisponde a quello degli autovettori nella base spettrale trovata.

*N.B.: Osservate che se l'esercizio richiedesse solo di determinare la diagonalizzabilità di  $A$  non sarebbe necessario risolvere le equazioni degli autospazi, ma soltanto calcolare le loro dimensioni. Notiamo anche che esistono infinite altre basi spettrali, soluzioni del nostro esercizio.*

ESERCIZIO 2. Dire se la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$  è diagonalizzabile sul campo dei reali. Se lo è calcolare una base spettrale dell'endomorfismo associato alla matrice  $A$  rispetto alla base canonica.

**Svolgimento.** Calcoliamo il determinante della matrice caratteristica (cioè il polinomio caratteristico  $p(\lambda)$ ):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 3)$$

le cui radici sono, ovviamente, gli autovalori  $3, -1$  e  $-3$ .

La molteplicità algebriche degli autovalori sono TUTTE uguali a 1, e quindi anche le loro molteplicità geometriche sono TUTTE uguali a 1 (ricordate che risulta  $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$ , cf. Prop. 13.8 a pag. 258 del libro).

Quindi  $A$  è sicuramente diagonalizzabile, perché la somma delle molteplicità **geometriche** degli autovalori di  $A$  è uguale a 3 (cf. Teor. 13.9 a pag. 259 del libro).

*N.B.: Vediamo dunque che quando una matrice reale  $A$   $n \times n$  ammette esattamente  $n$  autovalori **DISTINTI**,  $A$  è sempre diagonalizzabile. Notate che è bastato cambiare segno ad un coefficiente nella matrice dell'esercizio precedente per ottenere un esercizio molto più semplice!*

Sappiamo già, a questo punto, che l'endomorfismo associato ad  $A$  rispetto alla base canonica ammette una base spettrale e che, rispetto ad essa, è descritto da una matrice diagonale avente sulla diagonale principale i tre autovalori  $3, -1, -3$  (il loro ordine cambia a seconda dell'ordine in cui prendiamo i vettori della base spettrale). Poiché, però, ci viene chiesto di trovare una base spettrale dobbiamo proseguire con i calcoli.

L'equazione dell'autospazio  $U_3$  di  $3$  è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con  $\lambda = 3$ . In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4

cioè

$$\begin{cases} 4x + 4y + 8z = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} .$$

Una soluzione parametrica di tale equazione è

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} .$$

In forma vettoriale possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Una base per  $U_3$  (che sappiamo già avere dimensione 1) è data da  $((1, -1, 0))$ .

Ora dobbiamo calcolare una base per  $U_{-1}$ . L'equazione dell'autospazio  $U_{-1}$  di  $-1$  è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con  $\lambda = -1$ . In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

cioè

$$\begin{cases} -4x = 0 \\ 4x + 8z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} .$$

Tale sistema lineare equivale al seguente (la seconda equazione è combinazione lineare delle altre due):

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Una soluzione parametrica di tale equazione è

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 0 \end{cases} .$$

In forma vettoriale possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi  $((0, 1, 0))$  costituisce una base per  $U_{-1}$ .

Per finire dobbiamo calcolare una base per  $U_{-3}$ . L'equazione dell'autospazio  $U_{-3}$  di  $-3$  è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con  $\lambda = -3$ . In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

cioè

$$\begin{cases} -6x & = & 0 \\ 4x - 2y + 8z & = & 0 \end{cases}.$$

Tale sistema lineare equivale al seguente:

$$\begin{cases} x & = & 0 \\ 2x - y + 4z & = & 0 \end{cases}.$$

Una soluzione parametrica di tale equazione è

$$\begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & 4t \\ z & = & t \end{cases}.$$

In forma vettoriale possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi  $((0, 4, 1))$  costituisce una base per  $U_{-3}$ .

Una base spettrale per l'endomorfismo associato ad  $A$  rispetto alla base canonica è quindi data dalla terna  $((1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 4, 1))$ . Rispetto a tale base la matrice  $A$  acquisisce la forma diagonale

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Notate che l'ordine sulla diagonale degli autovalori corrisponde a quello degli autovettori nella base spettrale trovata.

N.B.: Nei due precedenti esercizi gli autovalori coincidevano con i valori presenti sulla diagonale principale di  $A$ . Questo NON è vero in generale, come si vede dall'esercizio che segue.

ESERCIZIO 3. Dire se la matrice  $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$  è diagonalizzabile sul campo dei reali. Se lo è calcolare una base spettrale dell'endomorfismo associato alla matrice  $A$  rispetto alla base canonica. Dire se la funzione  $f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^2$ .

**Svolgimento.** Possiamo immediatamente dire che  $A$  è diagonalizzabile, senza far alcun calcolo, perché  $A$  è simmetrica (cf. il Teorema Spettrale: Teorema 14.3 a pagina 267 del libro).

Calcoliamo allora una base spettrale dell'endomorfismo  $T$  associato alla matrice  $A$  rispetto alla base canonica.

Prima di tutto calcoliamo il determinante della matrice caratteristica (cioè il polinomio caratteristico  $p(\lambda)$ ):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & -4 \\ -4 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = (\lambda - 5)^2 - 16.$$

Possiamo trovare le radici del polinomio caratteristico nel modo usuale, ma possiamo anche osservare che  $(\lambda - 5)^2 - 16 = 0$  equivale a  $(\lambda - 5)^2 = 16$ , cioè  $\lambda - 5 = \pm 4$  e quindi  $\lambda = 5 \pm 4$ . Perciò gli autovalori sono 9 e 1.

Dato che abbiamo  $n$  autovalori distinti gli  $n$  autospazi a loro associati avranno tutti dimensione 1.

L'equazione dell'autospazio  $U_9$  di 9 è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 5 & -4 \\ -4 & \lambda - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con  $\lambda = 9$ . In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

cioè

$$\begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ -4x + 4y = 0 \end{cases}.$$

Poiché la seconda equazione è multipla della prima l'equazione di  $U_9$  si può scrivere in modo più semplice come  $4x - 4y = 0$ .

Una soluzione parametrica di tale equazione è

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}.$$

In forma vettoriale possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Una base per  $U_9$  (che sapevamo già avere dimensione 1) è data da  $((1, 1))$ .

Ora dobbiamo calcolare una base per  $U_1$ . L'equazione dell'autospazio  $U_1$  di 1 è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 5 & -4 \\ -4 & \lambda - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con  $\lambda = 1$ . In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

cioè

$$\begin{cases} -4x - 4y = 0 \\ -4x - 4y = 0 \end{cases}.$$

Poiché la seconda equazione è uguale alla prima l'equazione di  $U_1$  si può scrivere in modo più semplice come  $-4x - 4y = 0$ .

Una soluzione parametrica di tale equazione è

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}.$$

In forma vettoriale possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Una base per  $U_1$  (che sapevamo già avere dimensione 1) è data da  $((1, -1))$ .

Quindi una base spettrale è data da  $((1, 1), (1, -1))$ .

La funzione  $f$  è chiaramente una forma bilineare. Inoltre è simmetrica perché  $A$  è simmetrica. Visto che la forma diagonale di  $A$  ottenuta rispetto alla base spettrale è la matrice  $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  si ha che rispetto alla base spettrale  $f$  può essere scritta (nelle nuove variabili  $x'$  e  $y'$ ) come  $9x'^2 + y'^2$  e di conseguenza è definita positiva. Si tratta dunque di un prodotto scalare.

*N.B.: Visto che abbiamo a che fare con una matrice  $2 \times 2$ , possiamo determinare che  $f$  è un prodotto scalare anche osservando che la traccia e il determinante della diagonalizzazione  $D$  di  $A$  coincidono rispettivamente con  $\text{tr}A = 10$  e  $\det A = 9$  (cf. Def. 9.3 a pagina 160 e Def. 13.5 a pagina 255 del libro). Infatti questo implica che la somma degli autovalori di  $A$  è uguale a 10 e che il prodotto degli autovalori di  $A$  è uguale a 9 (ricordate che gli elementi della diagonale di  $D$  sono proprio gli autovalori di  $A$ ). Ne consegue che gli autovalori di  $A$  sono entrambi positivi e che, perciò,  $f$  è un prodotto scalare.*

ESERCIZIO 4. Dire se la funzione  $f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^2$ .

**Svolgimento.** Possiamo immediatamente dire che  $A$  è diagonalizzabile, senza far alcun calcolo, perché  $A$  è simmetrica (cf. il Teorema Spettrale: Teorema 14.3 a pagina 267 del libro).

La funzione  $f$  è chiaramente una forma bilineare. Inoltre è simmetrica perché  $A$  è simmetrica. Visto che abbiamo a che fare con una matrice  $2 \times 2$ , possiamo determinare se  $f$  è un prodotto scalare osservando che la traccia e il determinante della diagonalizzazione  $D$  di  $A$  coincidono rispettivamente con  $\text{tr}A = 5$  e  $\det A = -10$ . Dato che il prodotto degli autovalori di  $A$  è uguale a  $-10$  (ricordate che gli elementi della diagonale di  $D$  sono proprio gli autovalori di  $A$ ), gli autovalori di  $A$  sono uno positivo ed uno negativo. Perciò  $f$  non è definita (perché nelle nuove variabili  $x'$ ,  $y'$  si potrà scrivere come  $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$  con  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$ ). Quindi  $f$  non è un prodotto scalare (non essendo una forma definita positiva).

ESERCIZIO 5. Dire se la funzione  $f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^2$ .

**Svolgimento.** Possiamo immediatamente dire che  $A$  è diagonalizzabile, senza far alcun calcolo, perché  $A$  è simmetrica (cf. il Teorema Spettrale: Teorema 14.3 a pagina 267 del libro).

La funzione  $f$  è chiaramente una forma bilineare. Inoltre è simmetrica perché  $A$  è simmetrica. Visto che abbiamo a che fare con una matrice  $2 \times 2$ , possiamo determinare se  $f$  è un prodotto scalare osservando che la traccia e il determinante della diagonalizzazione  $D$  di  $A$  coincidono rispettivamente con  $\text{tr}A = -5$  e  $\det A = 5$ . Dato che il prodotto degli autovalori di  $A$  è uguale a 5 (ricordate che gli elementi della diagonale di  $D$  sono proprio gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2$  di  $A$ ), gli autovalori di  $A$  hanno lo stesso segno. Essendo la loro somma negativa, tale segno è anch'esso negativo. Perciò  $f$  è definita negativa (perché nelle nuove variabili  $x', y'$  si potrà scrivere come  $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$  con  $\lambda_1, \lambda_2$  entrambi negativi) e quindi non è un prodotto scalare.

ESERCIZIO 6. Dire se la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  è diagonalizzabile sul campo dei reali. Se lo è calcolare una base spettrale dell'endomorfismo associato alla matrice  $A$  rispetto alla base canonica.

**Svolgimento.** Calcoliamo il determinante della matrice caratteristica (cioè il polinomio caratteristico  $p(\lambda)$ ):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1) \cdot ((\lambda - 1)^2 + 1).$$

Poiché il polinomio  $(\lambda - 1)^2 + 1$  NON ammette radici reali, si ha che 1 è l'unico autovalore, e che la sua molteplicità algebrica è 1. Quindi anche la sua molteplicità geometrica è 1 (ricordate che risulta  $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$ , cf. Prop. 13.8 a pag. 258 del libro). Dunque la somma delle molteplicità geometriche di tutti gli autovalori è 1, strettamente inferiore a 3. Perciò non esiste alcuna base spettrale (cf. Teor. 13.9 a pag. 259 del libro).

N.B.: Il precedente esercizio mette in evidenza che quando la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori non arriva ad  $n$ , neppure quella delle molteplicità geometriche può arrivarci, e dunque non esiste alcuna base spettrale.

ESERCIZIO 7.

Dire se la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$  e la

matrice  $1000 \times 1000$   $B = (b_j^i)$  con  $b_j^i = i \cdot j$  sono diagonalizzabili sul campo dei reali.

---

**Svolgimento.** Sono entrambe diagonalizzabili perché entrambe sono simmetriche (cf. Teorema Spettrale: Teor. 14.3 a pagina 267 del libro).

---

ESERCIZIO 8. Dire per quali valori del parametro reale  $t$  la matrice  $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t^2 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  è diagonalizzabile sul campo dei reali.

---

**Svolgimento.** Calcoliamo il determinante della matrice caratteristica (cioè il polinomio caratteristico  $p(\lambda)$ ):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -t^2 \\ 0 & \lambda - t & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - t) \cdot ((\lambda - 1)^2 - t^2).$$

Come si vede facilmente, le radici del polinomio caratteristico sono  $t$ ,  $1 + t$  e  $1 - t$ . Scrivendo le tre uguaglianze fra tali radici ( $t = 1 + t$ ,  $t = 1 - t$  e  $1 + t = 1 - t$ ) ricaviamo che sono tutte distinte fra loro se e solo se  $t \neq 0, \frac{1}{2}$ . Quindi per  $t \neq 0, \frac{1}{2}$  la matrice  $A_t$  è sicuramente diagonalizzabile. Esaminiamo ora i due casi  $t = 0$  e  $t = \frac{1}{2}$ .

Poniamo  $t = 0$  e calcoliamo il determinante della matrice caratteristica di  $A_0$  (cioè il polinomio caratteristico  $p(\lambda)$  di  $A_0$ ):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A_0) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot (\lambda - 1)^2.$$

Gli autovalori sono 0, di molteplicità algebrica 1 (e quindi di molteplicità geometrica 1) e 1, di molteplicità algebrica 2 (e quindi di molteplicità geometrica 1 o 2).

Determiniamo ora la molteplicità geometrica dell'autovalore 1.

L'equazione dell'autospazio  $U_1$  di 1 è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con  $\lambda = 1$ . In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che il rango della matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  è 2, la dimensione di  $U_1$  (cioè la molteplicità geometrica dell'autovalore 1) è uguale a  $3 - 2 = 1$ . Dunque la somma delle molteplicità geometriche dei due autovalori è 2 e quindi strettamente inferiore a 3. Per questo motivo  $A_t$  non è diagonalizzabile per  $t = 0$ .

Poniamo ora  $t = \frac{1}{2}$  e calcoliamo il determinante della matrice caratteristica di  $A_{\frac{1}{2}}$  (cioè il polinomio caratteristico  $p(\lambda)$  di  $A_{\frac{1}{2}}$ ):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A_{\frac{1}{2}}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot \left((\lambda - 1)^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Dato che  $(\lambda - \frac{1}{2}) \cdot ((\lambda - 1)^2 - \frac{1}{4}) = (\lambda - \frac{1}{2}) \cdot (\lambda - 1 - \frac{1}{2}) \cdot (\lambda - 1 + \frac{1}{2})$ , gli autovalori sono  $\frac{3}{2}$ , di molteplicità algebrica 1 (e quindi di molteplicità geometrica 1) e  $\frac{1}{2}$ , di molteplicità algebrica 2 (e quindi di molteplicità geometrica 1 o 2).

Determiniamo ora la molteplicità geometrica che non conosciamo, cioè quella dell'autovalore  $\frac{1}{2}$ .

L'equazione dell'autospazio  $U_{\frac{1}{2}}$  di  $\frac{1}{2}$  è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con  $\lambda = \frac{1}{2}$ . In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che il rango della matrice  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  è 1, la dimensione di  $U_{\frac{1}{2}}$  (cioè la molteplicità geometrica dell'autovalore  $\frac{1}{2}$ ) è uguale a  $3 - 1 = 2$ . Dunque la somma delle molteplicità geometriche dei due autovalori è 3 e quindi uguale a  $n$ . Per questo motivo  $A_t$  è diagonalizzabile per  $t = \frac{1}{2}$ .

Riassumendo, la matrice  $A_t$  è diagonalizzabile se e solo se  $t \neq 0$ .

*Un'osservazione per concludere: ricordatevi che applicando ad una matrice  $A$  delle operazioni riga (o colonna) non cambia il rango della matrice ma **cambiano**, in generale, i suoi autovalori e autovettori! Per esempio la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  si ottiene da  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sommando la prima riga alla seconda, ma mentre  $I$  è diagonalizzabile (visto che è già diagonale),  $A$  non lo è. Verificatelo.*