ESERCIZI D'ESAME

PRIMO MODULO DI GEOMETRIA SUPERIORE A.A. 2017/2018

docente: Patrizio Frosini

1. Sia M la somma connessa di g tori. Dimostrare che il limite del rapporto fra il numero f di facce e il numero v di vertici di una qualunque triangolazione di M tende a 2 quando v tende all'infinito.

2. Sia $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \ldots \subset \sigma_k$ una bandiera di un complesso simpliciale geometrico K. Dimostrare che i punti $B(\sigma_0), \ldots, B(\sigma_k)$ sono affinemente indipendenti.

3. Siano $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^d$. Si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono n punti $v'_1, \ldots, v'_n \in \mathbb{R}^d$ tali che $\|v_1 - v'_1\|, \ldots, \|v_n - v'_n\| \leq \varepsilon$ e per ogni sottoinsieme $\{v'_{i_1}, \ldots, v'_{i_{d+2}}\}$ di cardinalità $d+2$ di $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ non esiste nessuna superficie sferica $(d-1)$-dimensionale che lo contenga.

4. Calcolare i gruppi di omologia simpliciale di un complesso simpliciale geometrico K scelto a piacere. Dopo aver fatto questo si calcolino delle basi per gli spazi vettoriali $Z_p(K)$ e $B_p(K)$, per ogni $p \in \mathbb{Z}$.

5. Si considerino le funzioni $\varphi, \psi : D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}$ definite ponendo $\varphi(x, y) := 5(1 - x^2 - y^2)/2$ e $\psi(x, y) := 1 + \cos(3\pi(x^2 + y^2))$ per ogni $(x, y) \in D^2$. Si calcoli la pseudodistanza naturale $d_G(\varphi, \psi)$ per $G = \mathrm{Homeo}(D^2)$.