
ESERCIZIO 1. Dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile sul campo dei reali. Se lo è calcolare una base spettrale e la relativa forma diagonale di A.

Svolgimento. Calcoliamo il determinante della matrice caratteristica (cioè il polinomio caratteristico $p(\lambda)$):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 3)^2 \cdot (\lambda + 1)$$

le cui radici sono, ovviamente, gli autovalori 3 e -1.

N.B.: un'ingenuità classica è quella di moltiplicare i fattori del polinomio caratteristico, ottenendo un polinomio di cui non è più immediato calcolare le radici. Se il polinomio caratteristico "nasce" già fattorizzato non conviene moltiplicarne i fattori!

La molteplicità algebrica $ma(-1)$ dell'autovalore -1 è 1, e quindi anche la molteplicità geometrica $mg(-1)$ dell'autovalore -1 è 1 (ricordate che risulta $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$, cf. Prop. 13.8 a pag. 258 del libro). Per quanto riguarda l'altro autovalore occorre invece fare qualche calcolo perché il valore della molteplicità geometrica di 3 non è ovvia. L'equazione dell'autospazio U_3 di 3 è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda = 3$. In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango $r(A)$ di A è uguale a 1 (DEVE essere minore di 3!) La dimensione di U_3 (cioè, per definizione, $mg(3)$) risulta dunque uguale a $n - r(A) = 3 - 1 = 2$ (cf. Oss. 13.7 a pag. 258 del libro). Dunque la somma $mg(-1) + mg(3)$ delle molteplicità **geometriche** degli autovalori di A è uguale a $1 + 2 = 3$ e A risulta diagonalizzabile (cf. Teor. 13.9 a pag. 259 del libro).

Calcoliamo ora una base spettrale per l'endomorfismo associato ad A rispetto alla base canonica. Per farlo occorre calcolare una base per U_{-1} ed una base di U_3, per poi unirle a formare la base spettrale cercata. Come già sappiamo l'equazione di U_3 è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè $4x + 4y + 8z = 0$, ovvero $x + y + 2z = 0$. Una soluzione parametrica di tale equazione è
$$\begin{cases} x &= -s - 2t \\ y &= s \\ z &= t \end{cases}.$$
In forma vettoriale possiamo scrivere
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Dato che i due vettori $(-1, 1, 0)$, $(-2, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti, costituiscono una base per U_3 (che sappiamo già avere dimensione 2).

Ora dobbiamo calcolare una base per U_{-1}. L'equazione dell'autospazio U_{-1} di -1 è
$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
con $\lambda = -1$. In altre parole abbiamo l'equazione
$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
cioè
$$\begin{cases} -4x &= 0 \\ 4x + 8z &= 0 \\ -4z &= 0 \end{cases}.$$
Tale sistema lineare equivale al seguente (la seconda equazione è combinazione lineare delle altre due):
$$\begin{cases} x &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}.$$
Una soluzione parametrica di tale equazione è
$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= s \\ z &= 0 \end{cases}.$$
In forma vettoriale possiamo scrivere
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
e quindi $((0, 1, 0))$ costituisce una base per U_{-1}.

Una base spettrale per l'endomorfismo associato ad A rispetto alla base canonica è quindi data dalla terna $((-1, 1, 0), (-2, 0, 1), (0, 1, 0))$. Rispetto a tale base, l'endomorfismo definito dalla matrice A rispetto alla base canonica viene descritto dalla matrice diagonale
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Notate che l'ordine sulla diagonale degli autovalori corrisponde a quello degli autovettori nella base spettrale trovata.

N.B.: Osservate che se l'esercizio richiedesse solo di determinare la diagonalizzabilità di A non sarebbe necessario risolvere le equazioni degli autospazi, ma soltanto calcolare le loro dimensioni. Notiamo anche che esistono infinite altre basi spettrali, soluzioni del nostro esercizio.

Esercizio 2. Dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile sul campo dei reali. Se lo è calcolare una base spettrale dell'endomorfismo associato alla matrice A rispetto alla base canonica.

Svolgimento. Calcoliamo il determinante della matrice caratteristica (cioè il polinomio caratteristico $p(\lambda)$):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 3)$$

le cui radici sono, ovviamente, gli autovalori 3,-1 e -3.

La molteplicità algebriche degli autovalori sono TUTTE uguali a 1, e quindi anche le loro molteplicità geometriche sono TUTTE uguali a 1 (ricordate che risulta $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$, cf. Prop. 13.8 a pag. 258 del libro).

Quindi A è sicuramente diagonalizzabile, perché la somma delle molteplicità **geometriche** degli autovalori di A è uguale a 3 (cf. Teor. 13.9 a pag. 259 del libro).

N.B.: Vediamo dunque che quando una matrice reale A $n \times n$ ammette esattamente n autovalori DISTINTI, A è sempre diagonalizzabile. Notate che è bastato cambiare segno ad un coefficiente nella matrice dell'esercizio precedente per ottenere un esercizio molto più semplice!

Sappiamo già, a questo punto, che l'endomorfismo associato ad A rispetto alla base canonica ammette una base spettrale e che, rispetto ad essa, è descritto da una matrice diagonale avente sulla diagonale principale i tre autovalori $3, -1, -3$ (il loro ordine cambia a seconda dell'ordine in cui prendiamo i vettori della base spettrale). Poiché, però, ci viene chiesto di trovare una base spettrale dobbiamo proseguire con i calcoli.

L'equazione dell'autospazio U_3 di 3 è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda = 3$. In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

cioè

$$\begin{cases} 4x + 4y + 8z &= 0 \\ 6z &= 0 \end{cases}.$$

Una soluzione parametrica di tale equazione è

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= -t \\ z &= 0 \end{cases}.$$

In forma vettoriale possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una base per U_3 (che sappiamo già avere dimensione 1) è data da $((1, -1, 0))$.

Ora dobbiamo calcolare una base per U_{-1}. L'equazione dell'autospazio U_{-1} di -1 è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda = -1$. In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

cioè

$$\begin{cases} -4x &= 0 \\ 4x + 8z &= 0 \\ 2z &= 0 \end{cases}.$$

Tale sistema lineare equivale al seguente (la seconda equazione è combinazione lineare delle altre due):

$$\begin{cases} x &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}.$$

Una soluzione parametrica di tale equazione è

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= s \\ z &= 0 \end{cases}.$$

In forma vettoriale possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $((0, 1, 0))$ costituisce una base per U_{-1}.

Per finire dobbiamo calcolare una base per U_{-3}. L'equazione dell'autospazio U_{-3} di -3 è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda = -3$. In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

cioè

$$\begin{cases} -6x &= 0 \\ 4x - 2y + 8z &= 0 \end{cases}.$$

Tale sistema lineare equivale al seguente:

$$\begin{cases} x &= 0 \\ 2x - y + 4z &= 0 \end{cases}.$$

Una soluzione parametrica di tale equazione è

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4t \\ z = t \end{cases}.$$

In forma vettoriale possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $((0,4,1))$ costituisce una base per U_{-3}.

Una base spettrale per l'endomorfismo associato ad A rispetto alla base canonica è quindi data dalla terna $((1,-1,0),(0,1,0),(0,4,1))$. Rispetto a tale base la matrice A acquisisce la forma diagonale

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Notate che l'ordine sulla diagonale degli autovalori corrisponde a quello degli autovettori nella base spettrale trovata.

N.B.: Nei due precedenti esercizi gli autovalori coincidevano con i valori presenti sulla diagonale principale di A. Questo NON è vero in generale, come si vede dall'esercizio che segue.

Esercizio 3. Dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile sul campo dei reali. Se lo è calcolare una base spettrale dell'endomorfismo associato alla matrice A rispetto alla base canonica. Dire se la funzione $f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento. Possiamo immediatamente dire che A è diagonalizzabile, senza far alcun calcolo, perché A è simmetrica (cf. il Teorema Spettrale: Teorema 14.3 a pagina 267 del libro).

Calcoliamo allora una base spettrale dell'endomorfismo T associato alla matrice A rispetto alla base canonica.

Prima di tutto calcoliamo il determinante della matrice caratteristica (cioè il polinomio caratteristico $p(\lambda)$):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & -4 \\ -4 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = (\lambda - 5)^2 - 16.$$

Possiamo trovare le radici del polinomio caratteristico nel modo usuale, ma possiamo anche osservare che $(\lambda - 5)^2 - 16 = 0$ equivale a $(\lambda - 5)^2 = 16$, cioè $\lambda - 5 = \pm 4$ e quindi $\lambda = 5 \pm 4$ Perciò gli autovalori sono 9 e 1.

Dato che abbiamo n autovalori distinti gli n autospazi a loro associati avranno tutti dimensione 1.

L'equazione dell'autospazio U_9 di 9 è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 5 & -4 \\ -4 & \lambda - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda = 9$. In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

cioè

$$\begin{cases} 4x - 4y & = & 0 \\ -4x + 4y & = & 0 \end{cases}.$$

Poiché la seconda equazione è multipla della prima l'equazione di U_9 si può scrivere in modo più semplice come $4x - 4y = 0$.

Una soluzione parametrica di tale equazione è

$$\begin{cases} x & = & t \\ y & = & t \end{cases}.$$

In forma vettoriale possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Una base per U_9 (che sapevamo già avere dimensione 1) è data da $((1, 1))$.

Ora dobbiamo calcolare una base per U_1. L'equazione dell'autospazio U_1 di 1 è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 5 & -4 \\ -4 & \lambda - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda = 1$. In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

cioè

$$\begin{cases} -4x - 4y & = & 0 \\ -4x - 4y & = & 0 \end{cases}.$$

Poiché la seconda equazione è uguale alla prima l'equazione di U_1 si può scrivere in modo più semplice come $-4x - 4y = 0$.

Una soluzione parametrica di tale equazione è

$$\begin{cases} x & = & t \\ y & = & -t \end{cases}.$$

In forma vettoriale possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Una base per U_1 (che sapevamo già avere dimensione 1) è data da $((1, -1))$.
Quindi una base spettrale è data da $((1, 1), (1, -1))$.

La funzione f è chiaramente una forma bilineare. Inoltre è simmetrica perché A è simmetrica. Visto che la forma diagonale di A ottenuta rispetto alla base spettrale è la matrice $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si ha che rispetto alla base spettrale f può essere scritta (nelle nuove variabili x' e y') come $9x'^2 + y'^2$ e di conseguenza è definita positiva. Si tratta dunque di un prodotto scalare.

N.B.: Visto che abbiamo a che fare con una matrice 2×2*, possiamo determinare che* f *è un prodotto scalare anche osservando che la traccia e il determinante della diagonalizzazione* D *di* A *coincidono rispettivamente con* $\mathrm{tr}A = 10$ *e* $\det A = 9$ *(cf. Def. 9.3 a pagina 160 e Def. 13.5 a pagina 255 del libro). Infatti questo implica che la somma degli autovalori di* A *è uguale a* 10 *e che il prodotto degli autovalori di* A *è uguale a* 9 *(ricordate che gli elementi della diagonale di* D *sono proprio gli autovalori di* A*). Ne consegue che gli autovalori di* A *sono entrambi positivi e che, perciò,* f *è un prodotto scalare.*

Esercizio 4. Dire se la funzione $f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento. Possiamo immediatamente dire che A è diagonalizzabile, senza far alcun calcolo, perché A è simmetrica (cf. il Teorema Spettrale: Teorema 14.3 a pagina 267 del libro).

La funzione f è chiaramente una forma bilineare. Inoltre è simmetrica perché A è simmetrica. Visto che abbiamo a che fare con una matrice 2×2, possiamo determinare se f è un prodotto scalare osservando che la traccia e il determinante della diagonalizzazione D di A coincidono rispettivamente con $\mathrm{tr}A = 5$ e $\det A = -10$. Dato che il prodotto degli autovalori di A è uguale a -10 (ricordate che gli elementi della diagonale di D sono proprio gli autovalori di A), gli autovalori di A sono uno positivo ed uno negativo. Perciò f non è definita (perché nelle nuove variabili x', y' si potrà scrivere come $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$ con $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$). Quindi f non è un prodotto scalare (non essendo una forma definita positiva).

Esercizio 5. Dire se la funzione $f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento. Possiamo immediatamente dire che A è diagonalizzabile, senza far alcun calcolo, perché A è simmetrica (cf. il Teorema Spettrale: Teorema 14.3 a pagina 267 del libro).

La funzione f è chiaramente una forma bilineare. Inoltre è simmetrica perché A è simmetrica. Visto che abbiamo a che fare con una matrice 2×2, possiamo determinare se f è un prodotto scalare osservando che la traccia e il determinante della diagonalizzazione D di A coincidono rispettivamente con $\mathrm{tr}A = -5$ e $\det A = 5$. Dato che il prodotto degli autovalori di A è uguale a 5 (ricordate che gli elementi della diagonale di D sono proprio gli autovalori λ_1, λ_2 di A), gli autovalori di A hanno lo stesso segno. Essendo la loro somma negativa, tale segno è anch'esso negativo. Perciò f è definita negativa (perché nelle nuove variabili x', y' si potrà scrivere come $\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2$ con λ_1, λ_2 entrambi negativi) e quindi non è un prodotto scalare.

Esercizio 6. Dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile sul campo dei reali. Se lo è calcolare una base spettrale dell'endomorfismo associato alla matrice A rispetto alla base canonica.

Svolgimento. Calcoliamo il determinante della matrice caratteristica (cioè il polinomio caratteristico $p(\lambda)$):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1) \cdot \left((\lambda - 1)^2 + 1\right).$$

Poiché il polinomio $(\lambda - 1)^2 + 1$ NON ammette radici reali, si ha che 1 è l'unico autovalore, e che la sua molteplicità algebrica è 1. Quindi anche la sua molteplicità geometrica è 1 (ricordate che risulta $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$, cf. Prop. 13.8 a pag. 258 del libro). Dunque la somma delle molteplicità geometriche di tutti gli autovalori è 1, strettamente inferiore a 3. Perciò non esiste alcuna base spettrale (cf. Teor. 13.9 a pag. 259 del libro).

N.B.: Il precedente esercizio mette in evidenza che quando la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori non arriva ad n, neppure quella delle molteplicità geometriche può arrivarci, e dunque non esiste alcuna base spettrale.

Esercizio 7.

Dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$ e la matrice 1000×1000 $B = (b^i_j)$ con $b^i_j = i \cdot j$ sono diagonalizzabili sul campo dei reali.

Svolgimento. Sono entrambe diagonalizzabili perché entrambe sono simmetriche (cf. Teorema Spettrale: Teor. 14.3 a pagina 267 del libro).

Esercizio 8. Dire per quali valori del parametro reale t la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t^2 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile sul campo dei reali.

Svolgimento. Calcoliamo il determinante della matrice caratteristica (cioè il polinomio caratteristico $p(\lambda)$):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -t^2 \\ 0 & \lambda - t & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - t) \cdot \left((\lambda - 1)^2 - t^2\right).$$

Come si vede facilmente, le radici del polinomio caratteristico sono t, $1+t$ e $1-t$. Scrivendo le tre uguaglianze fra tali radici ($t = 1+t$, $t = 1-t$ e $1+t = 1-t$) ricaviamo che sono tutte distinte fra loro se e solo se $t \neq 0, \frac{1}{2}$. Quindi per $t \neq 0, \frac{1}{2}$ la matrice A_t è sicuramente diagonalizzabile. Esaminiamo ora i due casi $t = 0$ e $t = \frac{1}{2}$.

Poniamo $t = 0$ e calcoliamo il determinante della matrice caratteristica di A_0 (cioè il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ di A_0):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A_0) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot (\lambda - 1)^2.$$

Gli autovalori sono 0, di molteplicità algebrica 1 (e quindi di molteplicità geometrica 1) e 1, di molteplicità algebrica 2 (e quindi di molteplicità geometrica 1 o 2).

Determiniamo ora la molteplicità geometrica dell'autovalore 1.

L'equazione dell'autospazio U_1 di 1 è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda = 1$. In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che il rango della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è 2, la dimensione di U_1 (cioè la molteplicità geometrica dell'autovalore 1) è uguale a $3 - 2 = 1$. Dunque la somma delle molteplicità geometriche dei due autovalori è 2 e quindi strettamente inferiore a 3. Per questo motivo A_t **non** è diagonalizzabile per $t = 0$.

Poniamo ora $t = \frac{1}{2}$ e calcoliamo il determinante della matrice caratteristica di $A_{\frac{1}{2}}$ (cioè il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ di $A_{\frac{1}{2}}$):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A_{\frac{1}{2}}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot \left((\lambda - 1)^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Dato che $\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot \left((\lambda - 1)^2 - \frac{1}{4}\right) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\lambda - 1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\lambda - 1 + \frac{1}{2}\right)$, gli autovalori sono $\frac{3}{2}$, di molteplicità algebrica 1 (e quindi di molteplicità geometrica 1) e $\frac{1}{2}$, di molteplicità algebrica 2 (e quindi di molteplicità geometrica 1 o 2).

Determiniamo ora la molteplicità geometrica che non conosciamo, cioè quella dell'autovalore $\frac{1}{2}$.

L'equazione dell'autospazio $U_{\frac{1}{2}}$ di $\frac{1}{2}$ è

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda = \frac{1}{2}$. In altre parole abbiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che il rango della matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ è 1, la dimensione di $U_{\frac{1}{2}}$ (cioè la molteplicità geometrica dell'autovalore $\frac{1}{2}$) è uguale a $3 - 1 = 2$. Dunque la somma delle molteplicità geometriche dei due autovalori è 3 e quindi uguale a n. Per questo motivo $\underline{A_t \text{ è diagonalizzabile per } t = \tfrac{1}{2}}$.

Riassumendo, la matrice A_t è diagonalizzabile se e solo se $t \neq 0$.

Un'osservazione per concludere: ricordatevi che applicando ad una matrice A delle operazioni riga (o colonna) non cambia il rango della matrice ma ***cambiano****, in generale, i suoi autovalori e autovettori! Per esempio la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *si ottiene da* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *sommando la prima riga alla seconda, ma mentre I è diagonalizzabile (visto che è già diagonale), A non lo è. Verificatelo.*