Nel seguito $\mathbb{R}^3$ indicherà lo spazio euclideo tridimensionale standard, dotato del riferimento cartesiano naturale (pag. 156-157 del libro). Nota: gli esercizi proposti si possono svolgere in molti modi diversi. Le soluzioni qui riportate non sono, ovviamente, le uniche possibili.

Esercizio 1. Dire se le rette r e s di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x &= t+1 \\ y &= t-7 \\ z &= 5t \end{cases}, s: \begin{cases} x &= 3t \\ y &= 12t+2 \\ z &= -3t-4 \end{cases}$$

sono parallele e se sono ortogonali. Nel caso che siano ortogonali dire se sono incidenti oppure sghembe.

Svolgimento. Dalle due rappresentazioni parametriche si vede subito che $(1,1,5)$ e $(3,12,-3)$ sono due terne di numeri direttori per r e s, rispettivamente.

La condizione di parallelismo fra r e s è data dall'uguaglianza $\rho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 12 & -3 \end{pmatrix} = 1$ (cioè le due terne di numeri direttori devono essere proporzionali). Tale uguaglianza non è verificata, poiché risulta $\rho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 12 & -3 \end{pmatrix} = 2$. Quindi r e s non sono fra loro parallele.

La condizione di ortogonalità fra le due rette r e s è espressa dall'uguaglianza $\langle (1,1,5), (3,12,-3)\rangle = 0$. Tale uguaglianza è verificata, quindi r e s sono fra loro ortogonali.

Eliminando il parametro t dalle due equazioni parametriche si ottengono una equazione cartesiana per r ed una per s:

$$r: \begin{cases} x - y = 8 \\ 5y - z = -35 \end{cases}, s: \begin{cases} 4x - y = -2 \\ x + z = -4 \end{cases}.$$

Unendo i due sistemi si ottiene il nuovo sistema lineare

$$r: \begin{cases} x - y = 8 \\ 5y - z = -35 \\ 4x - y = -2 \\ x + z = -4 \end{cases},$$

che rappresenta l'intersezione delle due rette. La matrice incompleta del sistema è $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mentre quella completa è $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & -1 & -35 \\ 4 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Dato che $\det C = 63 \neq 0$ e perciò $\rho(C) = 4$, si ha (risultando $\rho(A) \leq 3$) che $\rho(A) \neq \rho(C)$ e quindi, per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema lineare non ammette soluzioni. Dunque le rette r e s non si intersecano. La conclusione è che le due rette sono sghembe (vedere anche la Prop. 11.1 a pag. 201 del libro).

Esercizio 2. Dire se i piani α e β di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane

$$\alpha : x - 2y - 3z = 100, \qquad \beta : 4x - 8y - 12z = 1$$

sono ortogonali e se sono paralleli. Nel caso che siano paralleli dire se sono coincidenti oppure disgiunti.

Svolgimento. Ricordiamo che le giaciture di α e β sono rispettivamente definite dalle equazioni $x-2y-3z = 0$ e $4x-8y-12z = 0$. Dalle due equazioni cartesiane si vede subito che il vettore $u = (1, -2, -3)$ è ortogonale alla giacitura di α e il vettore $v = (4, -8, -12)$ è ortogonale alla giacitura di β. I due piani sono ortogonali se e solo se questi due vettori sono ortogonali, cioè se e solo se $\langle(1, -2, -3), (4, -8, -12)\rangle = 0$ (Prop. 11.5 a pag. 208 del libro). Questa condizione non è soddisfatta e quindi α e β non sono fra loro ortogonali.

I due piani α e β sono paralleli se e solo se u e v sono proporzionali, cioè se e solo se $\rho\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & -8 & -12 \end{pmatrix} = 1$ (Prop. 11.3 a pag. 205 del libro). Tale condizione è verificata e quindi i due piani α e β sono fra loro paralleli.

Unendo le due equazioni che rappresentano α e β si ottiene il nuovo sistema

$$\begin{cases} x & -2y & -3z & = & 100 \\ 4x & -8y & -12z & = & 1 \end{cases},$$

che rappresenta l'intersezione dei due piani. La matrice incompleta del sistema è $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & -8 & -12 \end{pmatrix}$ mentre quella completa è $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 100 \\ 4 & -8 & -12 & 1 \end{pmatrix}$. Dato che $\rho(C) = 2$ mentre sappiamo già che $\rho(A) = 1$, si ha che $\rho(A) \neq \rho(C)$ e quindi, per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema lineare non ammette soluzioni. Dunque i piani α e β non si intersecano. La conclusione è che i due piani sono paralleli e disgiunti (Prop. 11.3 a pag. 205 del libro).

Esercizio 3. Calcolare una equazione parametrica ed una equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $A \equiv (1, 0, -1)$, $B \equiv (1, 1, 2)$ e $C \equiv (2, 3, -3)$.

Svolgimento. I punti P del nostro piano si possono ottenere ponendo $P = A + s \cdot (B - A) + t \cdot (C - A)$, con s e t numeri reali arbitrari. In altri termini, un'equazione parametrica del nostro piano è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{cases} x & = & t+1 \\ y & = & s+3t \\ z & = & 3s-2t-1 \end{cases}.$$

Eliminando dal sistema i parametri s e t si ottiene una equazione cartesiana del piano cercato: $11x - 3y + z - 10 = 0$.

Un altro metodo per trovare un'equazione cartesiana del piano per A, B e C è quello di cercare dei coefficienti a, b, c, d tali che il piano di equazione $ax+by+cz+d=0$ passi per A, B e C. Queste tre condizioni portano al sistema lineare

$$\begin{cases} a\cdot 1 & + & b\cdot 0 & + & c\cdot(-1) & + & d & = & 0 \\ a\cdot 1 & + & b\cdot 1 & + & c\cdot 2 & + & d & = & 0 \\ a\cdot 2 & + & b\cdot 3 & + & c\cdot(-3) & + & d & = & 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} a & & -c & +d & = & 0 \\ a & +b & +2c & +d & = & 0 \\ 2a & +3b & -3c & +d & = & 0 \end{cases} .$$

Risolvendo il sistema rispetto al parametro $t = d$ si ottiene che $a = -\frac{11}{10}t$, $b = \frac{3}{10}t$, $c = -\frac{1}{10}t$ e $d = t$. Quindi l'equazione cercata è del tipo $-\frac{11}{10}t\cdot x+\frac{3}{10}t\cdot y-\frac{1}{10}t\cdot z+t=0$ con t numero reale arbitrario non nullo. Ponendo $t=-10$ si ottiene ancora una volta l'equazione $11x-3y+z-10=0$. (Ovviamente qualunque altra scelta di $t \neq 0$ porta ad una equazione cartesiana del piano considerato.)

Esercizio 4. Calcolare una equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ passante per $A=(0,1,0)$ e parallelo al piano di equazione cartesiana $x-y-4z=5$.

Svolgimento. I piani paralleli al piano $x-y-4z=5$ sono tutti e soli quelli di equazione $x-y-4z+k=0$, con k numero reale arbitrario. Sapendo che il piano passa per il punto $A=(0,1,0)$ si ottiene la condizione $0-1-4\cdot 0+k=0$, cioè $k=1$. Perciò l'equazione cercata è $x-y-4z+1=0$. (Vedere anche in fondo a pag. 204 del libro.)

Esercizio 5. Calcolare una equazione cartesiana della retta r di $\mathbb{R}^3$ passante per $A=(0,1,0)$ e ortogonale al piano di equazione cartesiana $x-y-4z=5$.

Svolgimento. La terna $(1,-1,-4)$ è una terna di numeri direttori per ogni retta ortogonale al piano $x-y-4z=5$ (Prop. 11.6, pag. 208-209 del libro). I punti P della nostra retta si possono ottenere ponendo $P=A+t\cdot(1,-1,-4)$, con t numero reale arbitrario. Quindi una equazione parametrica per la retta cercata è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{cases} x & = & t \\ y & = & -t+1 \\ z & = & -4t \end{cases} .$$

Eliminando dal sistema il parametro t si ottiene una equazione cartesiana del piano cercato:

$$\begin{cases} x & +y & & = & 1 \\ 4x & & +z & = & 0 \end{cases} .$$

Un altro metodo per ottenere una equazione cartesiana della retta r è quello di imporre che il vettore $(x,y,z)-(0,1,0)$ sia proporzionale al vettore $(1,-1,-4)$, cioè che $\rho\begin{pmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}=1$. Questa condizione, per il Teorema di Kronecker (pag. 96 del libro), equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} \left(\det \begin{matrix} x & y-1 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right) & = & 0 \\ \left(\det \begin{matrix} x & z \\ 1 & -4 \end{matrix}\right) & = & 0 \end{cases},$$

cioè al sistema lineare

$$\begin{cases} -x & -y & +1 & = & 0 \\ -4x & & -z & = & 0 \end{cases}.$$

Questo sistema è equivalente a quello precedentemente trovato e dà un'altra equazione cartesiana della retta r.

Esercizio 6. Calcolare il coseno del minore fra gli angoli formati dalle rette r e s di equazioni cartesiane $r:\begin{cases} x & -y & +z & = & 1 \\ x & +2y & -z & = & 2 \end{cases}$, $s:\begin{cases} 2x & +y & -2z & = & 1 \\ x & -y & -z & = & -1 \end{cases}$, incidenti in $(1,1,1)$ nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento. Risolvendo i due sistemi lineari omogenei $\begin{cases} x & -y & +z & = & 0 \\ x & +2y & -z & = & 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x & +y & -2z & = & 0 \\ x & -y & -z & = & 0 \end{cases}$ (che definiscono le giaciture di r e s) si trovano, rispettivamente, gli spazi vettoriali generati dai vettori $(1,-2,-3)$ e $(1,0,1)$. Quindi la terna $(1,-2,-3)$ è una terna di numeri direttori per r e la terna $(1,0,1)$ è una terna di numeri direttori per s.

Il coseno del più piccolo fra gli angoli formati dalle rette r e s è dato dalla formula

$$\frac{|\langle(1,-2,-3),(1,0,1)\rangle|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{7}}$$

(vedere pag. 136 e la Prop. 11.2 a pag. 203 del libro). Nota: non si richiede che le componenti delle due terne di numeri direttori siano positive.

Esercizio 7. Dire per quali valori del parametro reale k le rette r_k e s_k di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $r_k:\begin{cases} x & -y & +z & = & k \\ x & +2y & -z & = & 2 \end{cases}$, $s_k:\begin{cases} x & +y & & = & 1 \\ x & -y & -2kz & = & -1 \end{cases}$, sono coincidenti, parallele disgiunte, incidenti in un punto o sghembe. (Vedere anche la Prop. 11.1 a pag. 201 del libro).

Svolgimento. Risolvendo i due sistemi lineari si ricavano le equazioni parametriche per r_k e s_k:

$$r_k:\begin{cases} x & = & -\frac{1}{2}t+\frac{k+2}{2} \\ y & = & t \\ z & = & \frac{3}{2}t+\frac{k-2}{2} \end{cases},\quad s_k:\begin{cases} x & = & kt \\ y & = & 1-kt \\ z & = & t \end{cases}.$$

Da queste rappresentazioni parametriche otteniamo che $\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$ (e quindi anche $(-1, 2, 3)$) è una terna di numeri direttori per r_k, mentre $(k, -k, 1)$ è una terna di numeri direttori per s_k. Le due rette r_k e s_k sono parallele se e solo se $\rho\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ k & -k & 1 \end{pmatrix} = 1$ (cioè se e solo se le due terne di numeri direttori sono proporzionali). Questa condizione, per il Teorema di Kronecker (pag. 96 del libro), equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} \left(\det \begin{matrix} -1 & 2 \\ k & -k \end{matrix}\right) & = & 0 \\ \left(\det \begin{matrix} -1 & 3 \\ k & 1 \end{matrix}\right) & = & 0 \end{cases},$$

cioè al sistema lineare

$$\begin{cases} -k & = & 0 \\ -1-3k & = & 0 \end{cases}.$$

Questo sistema non ammette soluzione e quindi le rette r_k e s_k non sono parallele per alcun valore di k.

Unendo i sistemi che definiscono r_k e s_k si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} x & -y & +z & = & k \\ x & +2y & -z & = & 2 \\ x & +y & & = & 1 \\ x & -y & -2kz & = & -1 \end{cases},$$

che rappresenta l'intersezione delle due rette.

La matrice incompleta del sistema è $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2k \end{pmatrix}$ mentre quella completa è $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & k \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2k & -1 \end{pmatrix}$.

Dato che $\det C = -2 \cdot (k+1)^2$, per $k \neq -1$ si ha che $\rho(C) = 4$ e quindi $\rho(C) \neq \rho(A)$ (dato che $\rho(A) \leq 3$). Per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema lineare non ammette soluzioni. Dunque per $k \neq -1$ le rette r_k e s_k non si intersecano. (Vedere anche la Prop. 11.1 a pag. 201 del libro).

Per $k = -1$ si ha che $\rho(A) = \rho(C) = 3$ e quindi il sistema ammette esattamente una soluzione. Dunque per $k = -1$ le rette r_k e s_k si intersecano in un unico punto.

Riassumendo, r_k e s_k sono sghembe (cioè non parallele e non incidenti) per $k \neq -1$, e incidenti in un unico punto per $k = -1$.

Esercizio 8. Calcolare l'area del triangolo T di $\mathbb{R}^3$ di vertici $A \equiv (1, 1, 2)$, $B \equiv (2, 1, 0)$, $C \equiv (-1, 2, -1)$.

Svolgimento. Sappiamo che $\|(B-A) \wedge (C-A)\| = \|B-A\| \cdot \|C-A\| \cdot \sin\alpha$, dove α è l'angolo (minore di π radianti) formato dai due vettori $B-A$ e $C-A$. In altri termini $\|(B-A) \wedge (C-A)\|$ è uguale all'area del parallelogramma P che ha i segmenti (A, B) e (A, C) come lati. Dato che l'area di T è la metà dell'area di P, si ha che l'area di T è $\frac{1}{2}\|(B-A)\wedge(C-A)\| = \frac{1}{2}\|(1,0,-2)\wedge(-2,1,-3)\| = \frac{1}{2}\|(2,7,1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{54} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$.

Esercizio 9. Calcolare la distanza in $\mathbb{R}^3$ fra il punto $P \equiv (1,1,5)$ e il piano π di equazione $x - y + 3z - 8 = 0$.

Svolgimento. La distanza fra il punto $P \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e il piano π di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è data dalla formula $d(P,\pi) = \frac{|a\bar{x}+b\bar{y}+c\bar{z}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (Prop. 11.9 a pag. 211 del libro). Quindi si ha $d(P,\pi) = \frac{|1\cdot 1+(-1)\cdot 1+3\cdot 5-8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}} = \frac{7}{\sqrt{11}}$.

Esercizio 10. Calcolare la lunghezza e il punto medio del segmento (P,Q) di $\mathbb{R}^3$ con $P \equiv (1,1,5)$ e $Q \equiv (3,2,1)$.

Svolgimento. La lunghezza del segmento è data dalla distanza fra i punti P e Q ed è uguale a $\|Q-P\| = \|(2,1,-4)\| = \sqrt{2^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{21}$ (vedere pag. 170 del libro). Il punto medio del segmento è il punto $\frac{P+Q}{2} = \frac{(4,3,6)}{2} = \left(2, \frac{3}{2}, 3\right)$ (vedere Prop. 9.17 a pag. 174 del libro).

Esercizio 11. Calcolare le rispettive proiezioni ortogonali P', Q', R' dei tre punti $P \equiv (1,0,-2)$, $Q \equiv (1,-1,1)$, $R \equiv (1,0,0)$ sul piano U di equazione $x - y + z = 0$, in $\mathbb{R}^3$. Calcolare l'area del triangolo di vertici P', Q' e R'.

Svolgimento. Utilizziamo la Prop. 8.14 a pag. 147 del libro. Risolvendo l'equazione $x - y + z = 0$ si ottiene una rappresentazione parametrica del piano:

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = t - s \end{cases}.$$

Dunque

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi una base $\mathcal{B}_U$ del piano è data da $\mathcal{B}_U = ((1,0,-1),(0,1,1))$.

La matrice di Gram dei vettori di $\mathcal{B}_U$ è data da

$$G = \begin{pmatrix} \langle(1,0,-1),(1,0,-1)\rangle & \langle(1,0,-1),(0,1,1)\rangle \\ \langle(0,1,1),(1,0,-1)\rangle & \langle(0,1,1),(0,1,1)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice inversa di G è

$$G^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A delle componenti di $\mathcal{B}_U$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(le colonne di A sono i vettori di $\mathcal{B}_U$).

La Prop. 8.14 garantisce che

$${}^tP' = A \cdot G^{-1} \cdot {}^tA \cdot {}^tP, \quad {}^tQ' = A \cdot G^{-1} \cdot {}^tA \cdot {}^tQ, \quad {}^tR' = A \cdot G^{-1} \cdot {}^tA \cdot {}^tR$$

(nota: la trasposizione dei vettori riga che rappresentano i punti serve ad ottenere i vettori colonna delle loro componenti).

Risulta

$$\begin{aligned} A \cdot G^{-1} \cdot {}^tA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Perciò

$${}^tP' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$${}^tQ' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot {}^tQ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^tR' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot {}^tR = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Quindi $P' = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$, $Q' = (0,0,0)$, $R' = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

L'area del triangolo di vertici P', Q', R' è uguale a $\frac{1}{2}\|(P' - Q') \wedge (R' - Q')\| = \frac{1}{2}\|\frac{2}{3}(1,-1,1)\| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Un metodo alternativo per trovare le proiezioni ortogonali di P', Q' e R' su U consiste nel calcolare le equazioni parametriche delle rette r_P, r_Q ed r_R ortogonali al piano U e passanti rispettivamente per P, Q ed R. I punti P', Q', R' saranno dati dalle intersezioni di queste rette con U.

Visto che il piano U ha equazione cartesiana $x - y + z = 0$, $(1,-1,1)$ è una terna di numeri direttori per tutte e tre le rette. Possiamo quindi scrivere le equazioni parametriche delle tre rette:

$$r_P : \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t \\ z = t-2 \end{cases} \quad r_Q : \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t-1 \\ z = t+1 \end{cases} \quad r_R : \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}.$$

Considerando la rappresentazione parametrica della retta r_P e l'equazione del piano $x-y+z=0$ otteniamo la condizione $(t+1)-(-t)+(t-2)=0$, cioè $t=\frac{1}{3}$. Ponendo $t=\frac{1}{3}$ nella rappresentazione parametrica della retta r_P si ottiene il punto $P'=\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{5}{3}\right)$.

Considerando la rappresentazione parametrica della retta r_Q e l'equazione del piano $x-y+z=0$ otteniamo la condizione $(t+1)-(-t-1)+(t+1)=0$, cioè $t=-1$. Ponendo $t=-1$ nella rappresentazione parametrica della retta r_Q si ottiene il punto $Q'=(0,0,0)$.

Considerando la rappresentazione parametrica della retta r_R e l'equazione del piano $x-y+z=0$ otteniamo la condizione $(t+1)-(-t)+t=0$, cioè $t=-\frac{1}{3}$. Ponendo $t=-\frac{1}{3}$ nella rappresentazione parametrica della retta r_R si ottiene il punto $R'=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

Esercizio 12. Calcolare una equazione parametrica della retta r di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $(0,0,3)$, parallela al piano π di equazione cartesiana $x+4y-z=1$ e ortogonale alla retta s passante per i punti $A=(1,2,3)$ e $B=(1,1,5)$.

Svolgimento. Indichiamo con (l,m,n) una terna di numeri direttori per r. Dato che r è parallela al piano π dovrà risultare $\langle(1,4,-1),(l,m,n)\rangle=0$, cioè $l+4m-n=0$ (vedere Prop. 11.6 a pag. 208).

Una terna di numeri direttori della retta s è data da $B-A=(0,-1,2)$. Dato che r è ortogonale a s dovrà essere $\langle(0,-1,2),(l,m,n)\rangle=0$, cioè $-m+2n=0$ (vedere Prop. 11.2 a pag. 202).

Si ottiene quindi il sistema lineare omogeneo (nelle incognite l,m,n)

$$\begin{cases} l & +4m & -n & = & 0 \\ & -m & +2n & = & 0 \end{cases},$$

che ammette la seguente soluzione parametrica:

$$\begin{cases} l & = & -7t \\ m & = & 2t \\ n & = & t \end{cases}.$$

Quindi $(-7,2,1)$ è una terna di numeri direttori per la retta r. Perciò, ricordando che r passa per il punto $(0,0,3)$, una equazione parametrica della retta r si ottiene ponendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{cases} x & = & -7t \\ y & = & 2t \\ z & = & t+3 \end{cases}.$$