Esercizio. Calcolare una base ortonormale per il nucleo della trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z, 5x + 5y + 5z).$$

Svolgimento. L'equazione del nucleo è $x + y + z = 0$ (le altre equazioni sono multiple di questa). Risolvendo l'equazione si ottiene la rappresentazione parametrica $x = -s - t, y = s, z = t$. Quindi una base per $\ker f$ è data da $B = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Per ottenere una base ortonormale di $\ker f$ si può usare il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt (Proposizione 8.3.2 del libro). Dato che nel nostro caso lo spazio vettoriale considerato ha dimensione 2 abbiamo le uguaglianze

$\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0)$,
$\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$,
$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{w}}_2 \quad = \quad & \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 = \\
& (-1, 0, 1) - \left((-1, 0, 1) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \\
& (-1, 0, 1) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \\
& (-1, 0, 1) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = \\
& \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right),
\end{aligned}$$

$\mathbf{w}_2 = \frac{\hat{\mathbf{w}}_1}{\|\hat{\mathbf{w}}_1\|} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.
Una base ortonormale per $\ker f$ è quindi

$$B_{ORT} = \left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right).$$