

PROGRAMMA SVOLTO LEZIONE PER LEZIONE NEL PRIMO MODULO DEL CORSO DI GEOMETRIA SUPERIORE (P. Frosini - A.A. 2017/2018)

L1 Presentazione del corso. Topologia computazionale e analisi topologica dei dati. Caratteristica di Eulero di un poliedro omeomorfo a S^2 . I fullereni e il teorema dei dodici pentagoni.

L2 Combinazione affine. Inviluppo affine. Indipendenza affine. Combinazione convessa. Inviluppo convesso. Concetto di k -simpleso geometrico. Faccia, frontiera e interno di un simpleso geometrico. Complessi simpliciali geometrici e loro corpi. Poliedri. Triangolazione di uno spazio topologico. Sottocomplessi. k -scheletro. Stella, stella chiusa e link di un simpleso geometrico. Complessi simpliciali astratti. Facce, vertici e dimensione di un complesso simpliciale astratto. Complessi simpliciali astratti isomorfi. Schemi di vertici e realizzazioni geometriche.

L3 Simpleso standard. Complesso simpliciale geometrico delle facce del simpleso standard. Teorema di realizzazione geometrica (forma debole): ogni complesso simpliciale astratto è realizzabile come complesso delle facce di un simpleso geometrico di dimensione sufficientemente alta.

L4 Teorema di realizzazione geometrica (forma forte): ogni complesso simpliciale astratto d -dimensionale è realizzabile come complesso simpliciale geometrico in \mathbb{R}^{2d+1} . Non realizzabilità in \mathbb{R}^2 dei grafi di Kuratowski. Esercitazione sulla teoria topologica dei grafi. Caratteristica di Eulero del toro. Teorema di Kuratowski.

L5 Caratteristica di una somma connessa di superfici. Esercitazione sulla teoria topologica dei grafi. Definizione di CW-complesso.

L6 Delta-complessi. Enunciato del teorema di classificazione delle superfici connesse, compatte e senza bordo. Coordinate baricentriche. Mappe di vertici e applicazioni simpliciali. Esempi. Mappa PL indotta da un'applicazione simpliciale. Categorie e funtori.

L7 Suddivisione di un complesso simpliciale geometrico. Suddivisione baricentrica. Lemma della maglia. Esempi.

L8 Corollario al lemma della maglia. Lemma del simpleso. Lemma del numero di Lebesgue. Approssimazioni simpliciali. Teorema di approssimazione simpliciale. Teorema di approssimazione simpliciale in forma metrica. Caratteristica di Eulero per complessi simpliciali.

L9 Cenni ed esempi relativi al calcolo di Eulero. Principio di inclusione-esclusione. Formula generale per il calcolo della caratteristica di Eulero di una unione finita di sottocomplessi simpliciali di un complesso simpliciale dato.

L10 Lemma di separazione fra un compatto convesso e un chiuso convesso di \mathbb{R}^d tramite un iperpiano. Teorema di Helly e sue varianti. Nervo di una famiglia di insiemi. Complessi di Čech. Esempi.

L11 Omotopie, tipo di omotopia, retrazioni, retrazioni per deformazione. Se Y è retratto di deformazione di X , allora X e Y hanno lo stesso tipo di omotopia. Contraibilità e collassabilità. Se un complesso simpliciale geometrico è collassabile, allora il suo corpo è contraibile. Esempi.

L12 Esistono complessi simpliciali geometrici non collassabili il cui corpo è contraibile. Esistenza e unicità della minipalla contenente un compatto di \mathbb{R}^d . Criteri per determinare i semplici di un complesso di Čech. Teorema del nervo. Complessi di Vietoris-Rips. Esempi. Enunciato del lemma di Vietoris-Rips.

L13 Dimostrazione del lemma di Vietoris-Rips. Nubi di punti di \mathbb{R}^d in posizione generale rispetto alle superfici sferiche $(d-1)$ -dimensionali. Complessità computazionali delle verifiche di appartenenza di un semplice a un complesso di Čech e a un complesso di Vietoris-Rips sotto l'ipotesi che la nube di punti sia in posizione generale.

L14 Celle di Voronoi e diagrammi di Voronoi. Complessi di Delaunay. Alfa-complessi e loro principali proprietà. Operatore bordo e lemma fondamentale dell'omologia. Gruppi di omologia simpliciale a coefficienti in \mathbb{Z}_2 . Calcolo dei gruppi di omologia simpliciale a coefficienti in \mathbb{Z}_2 tramite matrici bordo. Esempi.

L15 Calcolo di una base per Z_p , B_p e H_p . Esercitazione sul calcolo dell'omologia simpliciale.

L16 Esercitazione sul calcolo di una base per Z_p , B_p e H_p . Omologia ridotta. Teorema di Eulero-Poincaré.

L17 Mappe di catene e omomorfismi indotti fra i gruppi di omologia. Mappa di catene indotta da un'applicazione simpliciale. Omologia simpliciale relativa. Esempi ed esercizi. Teorema di escissione.

L18 Successioni esatte. Successioni esatte di complessi e mappe di catene. Enunciato dello Snake Lemma. Successione esatta di una coppia e successione esatta di Mayer-Vietoris. Esercitazione.

L19 Dimostrazione dello Snake Lemma. Introduzione alla coomologia simpliciale a coefficienti in \mathbb{Z}_2 .

L20 Operatori cobordo algebrico e cobordo geometrico e loro proprietà. Gruppi di coomologia simpliciale a coefficienti in \mathbb{Z}_2 . Isomorfismo fra i gruppi di omologia e coomologia simpliciale a coefficienti in \mathbb{Z}_2 .

L21 Esercitazione sul calcolo dei gruppi di coomologia simpliciale a coefficienti in \mathbb{Z}_2 . Gruppi di coomologia simpliciale ridotta. Enunciato del Teorema di dualità di Poincaré e sue conseguenze sulla caratteristica di Eulero.

L22 Dimostrazione del Teorema di dualità di Poincaré.

L23 Teorema di dualità di Lefschetz. Esempi ed esercizi sul teorema di dualità di Lefschetz. Introduzione all'analisi topologica dei dati. Gruppi topologici. $\text{Homeo}(X)$ come gruppo topologico.

L24 Azione continua di $\text{Homeo}(X)$ su $C^0(X, \mathbb{R})$. Pseudo-distanza naturale d_G associata a un sottogruppo G di $\text{Homeo}(X)$. Filtrazioni di spazi topologici e di complessi simpliciali geometrici. Gruppi di omologia persistente e diagrammi di persistenza. Esempi di diagrammi di persistenza. Distanza di matching fra diagrammi di persistenza. La distanza di matching fra diagrammi di persistenza come limitazione inferiore per d_G . Metodo per calcolare la pseudo-distanza naturale. CONCLUSIONE DEL CORSO.