Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri l'insieme $GL_2(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 regolari a coefficienti reali. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra matrici. Allora
   A) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un gruppo.
   B) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un anello.
   C) $(GL_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$ è un campo.
   D) $(GL_2(\mathbf{R}), +)$ è un gruppo.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   B) $\det(A^2 \cdot B^2 \cdot C^4) = 1$.
   C) $A\cdot\, {}^tA\cdot\, {}^tB\cdot\, B\cdot\, C\cdot\, {}^tC = I_n$.
   D) la matrice $C^3 \cdot B^5 \cdot A$ è regolare.

3) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente inferiore al settimo.
   B) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$.
   C) insieme delle matrici reali 2×2 a coefficienti non negativi.
   D) insieme delle successioni reali che hanno il quarto termine uguale a 1.

4) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due isomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim \ker(T \circ S) = 0$.
   B) $\dim ImS = \dim \ker T$.
   C) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   D) $\dim T(S(U)) = \dim W$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $2(y - x)$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   B) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.

6) Sia $C^\infty(\mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare. Sia $D : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ la trasformazione lineare derivata. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) D ammette almeno un autovettore.
B) D ammette almeno un autovalore.
C) se la funzione $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ è un autovettore di D allora anche la funzione $f \circ f$ lo è.
D) tutti i numeri reali sono autovalori di D.

7) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
A) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$.
B) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - v, u + v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$.
C) se $v_1, \cdots, v_{n+1} \in V$ sono a due a due ortogonali allora almeno uno di essi è nullo.
D) $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$.

8) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
A) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $2x - 4y = 0$ sono fra loro ortogonali.
B) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}$.
C) la conica di equazione $y = 7x^2$ è una parabola.
D) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 0)$ è $3\sqrt{2}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se v è un autovettore di T allora è anche un autovettore di $-T^2 + 4T^5$.
   B) se T è privo di autovalori reali allora il suo polinomio caratteristico non ammette radici reali.
   C) se T ammette n autovalori reali distinti allora $\det A$ coincide con il prodotto di tali autovalori.
   D) $\det A = \det B$ se e solo se T è un isomorfismo.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(0, 0)$ è 10.
   B) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/2$ radianti.
   C) la conica di equazione $5x^2 + 4y^2 = 1$ è un'iperbole.
   D) se il punto P ha coordinate $(100, 0)$ e il punto Q ha coordinate $(0, -100)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(50, -50)$.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -5t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.

4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim \ker T^2 = 0$ se e solo se $\det A^2 = 0$.
   B) $\dim ImT = \rho(A)$.
   C) T^3 è un isomorfismo se e solo se T è un isomorfismo.
   D) $\det A \neq 0$ se e solo se ImT non contiene solo il vettore nullo.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = 0$.
   B) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.
   C) $A+B+C$ ha determinante nullo.
   D) $Tr(A+B+C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.

6) Si considerino sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
   B) $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ è un gruppo commutativo.
   C) $(\mathbf{R}, \cdot)$ non è un gruppo.
   D) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare compatibile di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $n = 2m$ allora lo spazio delle soluzioni di $\mathbf{S}$ ha dimensione m.
   B) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.
   C) $\rho(C) = \rho(A)$.
   D) ogni soluzione di $\mathbf{S}$ è anche soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

8) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme dei polinomi a coefficienti reali che ammettono almeno una radice reale.
   B) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x.
   C) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 = 3$.
   D) insieme delle successioni reali costanti.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette un numero infinito di basi ortogonali.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$.
   C) la relazione di ortogonalità fra vettori è una relazione di equivalenza.
   D) se $v = -w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \leq 0$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la matrice $C^3 \cdot B^5 \cdot A$ è regolare.
   B) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   C) $\det(A^2 \cdot B^2 \cdot C^4) = 1$.
   D) $A \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot B \cdot C \cdot {}^tC = I_n$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   C) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $2(y - x)$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.

3) Sia $C^\infty(\mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare. Sia $D : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ la trasformazione lineare derivata. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) tutti i numeri reali sono autovalori di D.
   B) se la funzione $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ è un autovettore di D allora anche la funzione $f \circ f$ lo è.
   C) D ammette almeno un autovalore.
   D) D ammette almeno un autovettore.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v = -w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \leq 0$.
   B) la relazione di ortogonalità fra vettori è una relazione di equivalenza.
   C) V ammette un numero infinito di basi ortogonali.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$.

5) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle successioni reali che hanno il quarto termine uguale a 1.
   B) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente inferiore al settimo.
   C) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$.
   D) insieme delle matrici reali 2×2 a coefficienti non negativi.

6) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due isomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim T(S(U)) = \dim W$.
   B) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   C) $\dim ImS = \dim \ker T$.
   D) $\dim \ker(T \circ S) = 0$.

7) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -5t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) se il punto P ha coordinate $(100, 0)$ e il punto Q ha coordinate $(0, -100)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(50, -50)$.
   B) la conica di equazione $5x^2 + 4y^2 = 1$ è un'iperbole.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(0, 0)$ è 10.
   D) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/2$ radianti.

9) Si consideri l'insieme $GL_2(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 regolari a coefficienti reali. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra matrici. Allora
   A) $(GL_2(\mathbf{R}), +)$ è un gruppo.
   B) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un gruppo.
   C) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un anello.
   D) $(GL_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$ è un campo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}$.
   B) la conica di equazione $y = 7x^2$ è una parabola.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 0)$ è $3\sqrt{2}$.
   D) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $2x - 4y = 0$ sono fra loro ortogonali.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare compatibile di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) ogni soluzione di $\mathbf{S}$ è anche soluzione del sistema lineare omogeneo associato.
   B) $\rho(C) = \rho(A)$.
   C) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.
   D) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $n = 2m$ allora lo spazio delle soluzioni di $\mathbf{S}$ ha dimensione m.

3) Si considerino sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.
   B) $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ è un gruppo commutativo.
   C) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
   D) $(\mathbf{R}, \cdot)$ non è un gruppo.

4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det A = \det B$ se e solo se T è un isomorfismo.
   B) se T ammette n autovalori reali distinti allora $\det A$ coincide con il prodotto di tali autovalori.
   C) se T è privo di autovalori reali allora il suo polinomio caratteristico non ammette radici reali.
   D) se v è un autovettore di T allora è anche un autovettore di $-T^2 + 4T^5$.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

6) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - v, u + v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$.
B) se $v_1, \cdots, v_{n+1} \in V$ sono a due a due ortogonali allora almeno uno di essi è nullo.
C) $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$.
D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$.

7) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
A) insieme delle successioni reali costanti.
B) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x.
C) insieme dei polinomi a coefficienti reali che ammettono almeno una radice reale.
D) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 = 3$.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
B) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
C) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = 0$.
D) $A + B + C$ ha determinante nullo.

9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\det A \neq 0$ se e solo se ImT non contiene solo il vettore nullo.
B) T^3 è un isomorfismo se e solo se T è un isomorfismo.
C) $\dim ImT = \rho(A)$.
D) $\dim\ker T^2 = 0$ se e solo se $\det A^2 = 0$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $Tr(A+B+C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
   B) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = 0$.
   C) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.
   D) $A+B+C$ ha determinante nullo.

2) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle successioni reali costanti.
   B) insieme dei polinomi a coefficienti reali che ammettono almeno una radice reale.
   C) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x.
   D) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 = 3$.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.

4) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due isomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim ImS = \dim \ker T$.
   B) $\dim \ker(T \circ S) = 0$.
   C) $\dim T(S(U)) = \dim W$.
   D) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $2(y - x)$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   C) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.

6) Sia $C^\infty(\mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare. Sia $D : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ la trasformazione lineare derivata. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) D ammette almeno un autovalore.
B) D ammette almeno un autovettore.
C) tutti i numeri reali sono autovalori di D.
D) se la funzione $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ è un autovettore di D allora anche la funzione $f \circ f$ lo è.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$.
B) $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$.
C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$.
D) se $v_1, \cdots, v_{n+1} \in V$ sono a due a due ortogonali allora almeno uno di essi è nullo.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}$.
B) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 0)$ è $3\sqrt{2}$.
C) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $2x - 4y = 0$ sono fra loro ortogonali.
D) la conica di equazione $y = 7x^2$ è una parabola.

9) Si considerino sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
A) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.
B) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
C) $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ è un gruppo commutativo.
D) $(\mathbf{R}, \cdot)$ non è un gruppo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) la relazione di ortogonalità fra vettori è una relazione di equivalenza.
   B) se $v = -w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \leq 0$.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$.
   D) V ammette un numero infinito di basi ortogonali.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se T è privo di autovalori reali allora il suo polinomio caratteristico non ammette radici reali.
   B) se v è un autovettore di T allora è anche un autovettore di $-T^2 + 4T^5$.
   C) se T ammette n autovalori reali distinti allora $\det A$ coincide con il prodotto di tali autovalori.
   D) $\det A = \det B$ se e solo se T è un isomorfismo.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det(A^2 \cdot B^2 \cdot C^4) = 1$.
   B) $A \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot B \cdot C \cdot {}^tC = I_n$.
   C) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   D) la matrice $C^3 \cdot B^5 \cdot A$ è regolare.

4) Si consideri l'insieme $GL_2(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 regolari a coefficienti reali. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra matrici. Allora
   A) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un anello.
   B) $(GL_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$ è un campo.
   C) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un gruppo.
   D) $(GL_2(\mathbf{R}), +)$ è un gruppo.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -5t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $5x^2 + 4y^2 = 1$ è un'iperbole.
   B) se il punto P ha coordinate $(100, 0)$ e il punto Q ha coordinate $(0, -100)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(50, -50)$.
   C) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/2$ radianti.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(0, 0)$ è 10.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim ImT = \rho(A)$.
   B) $\dim \ker T^2 = 0$ se e solo se $\det A^2 = 0$.
   C) T^3 è un isomorfismo se e solo se T è un isomorfismo.
   D) $\det A \neq 0$ se e solo se ImT non contiene solo il vettore nullo.

8) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$.
   B) insieme delle matrici reali 2×2 a coefficienti non negativi.
   C) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente inferiore al settimo.
   D) insieme delle successioni reali che hanno il quarto termine uguale a 1.

9) Sia **S** un sistema lineare compatibile di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.
   B) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $n = 2m$ allora lo spazio delle soluzioni di **S** ha dimensione m.
   C) $\rho(C) = \rho(A)$.
   D) ogni soluzione di **S** è anche soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.
   B) $A+B+C$ ha determinante nullo.
   C) $Tr(A+B+C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
   D) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = 0$.

2) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x.
   B) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 = 3$.
   C) insieme delle successioni reali costanti.
   D) insieme dei polinomi a coefficienti reali che ammettono almeno una radice reale.

3) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due isomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim ImS = \dim \ker T$.
   B) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   C) $\dim \ker(T \circ S) = 0$.
   D) $\dim T(S(U)) = \dim W$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   C) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $2(y-x)$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) se il punto P ha coordinate $(100, 0)$ e il punto Q ha coordinate $(0, -100)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(50, -50)$.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(0, 0)$ è 10.
   C) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/2$ radianti.
   D) la conica di equazione $5x^2 + 4y^2 = 1$ è un'iperbole.

6) Si considerino sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ è un gruppo commutativo.
   B) $(\mathbf{R}, \cdot)$ non è un gruppo.
   C) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.
   D) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.

7) Sia $C^\infty(\mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare. Sia $D : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ la trasformazione lineare derivata. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) D ammette almeno un autovalore.
   B) se la funzione $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ è un autovettore di D allora anche la funzione $f \circ f$ lo è.
   C) D ammette almeno un autovettore.
   D) tutti i numeri reali sono autovalori di D.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v = -w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \leq 0$.
   B) V ammette un numero infinito di basi ortogonali.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$.
   D) la relazione di ortogonalità fra vettori è una relazione di equivalenza.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -5t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare compatibile di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $n = 2m$ allora lo spazio delle soluzioni di $\mathbf{S}$ ha dimensione m.
   B) $\rho(C) = \rho(A)$.
   C) ogni soluzione di $\mathbf{S}$ è anche soluzione del sistema lineare omogeneo associato.
   D) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.

2) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

3) Si consideri l'insieme $GL_2(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 regolari a coefficienti reali. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra matrici. Allora
   A) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un gruppo.
   B) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un anello.
   C) $(GL_2(\mathbf{R}), +)$ è un gruppo.
   D) $(GL_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$ è un campo.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $y = 7x^2$ è una parabola.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}$.
   C) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $2x - 4y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 0)$ è $3\sqrt{2}$.

5) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente inferiore al settimo.
   B) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$.
   C) insieme delle successioni reali che hanno il quarto termine uguale a 1.
   D) insieme delle matrici reali 2×2 a coefficienti non negativi.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
B) $\det(A^2 \cdot B^2 \cdot C^4) = 1$.
C) la matrice $C^3 \cdot B^5 \cdot A$ è regolare.
D) $A \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot B \cdot C \cdot {}^tC = I_n$.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se v è un autovettore di T allora è anche un autovettore di $-T^2 + 4T^5$.
B) se T ammette n autovalori reali distinti allora $\det A$ coincide con il prodotto di tali autovalori.

C) $\det A = \det B$ se e solo se T è un isomorfismo.
D) se T è privo di autovalori reali allora il suo polinomio caratteristico non ammette radici reali.

8) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\dim \ker T^2 = 0$ se e solo se $\det A^2 = 0$.
B) T^3 è un isomorfismo se e solo se T è un isomorfismo.
C) $\det A \neq 0$ se e solo se ImT non contiene solo il vettore nullo.
D) $\dim ImT = \rho(A)$.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
A) se $v_1, \cdots, v_{n+1} \in V$ sono a due a due ortogonali allora almeno uno di essi è nullo.
B) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$.
C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$.
D) $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$.
   B) insieme delle successioni reali che hanno il quarto termine uguale a 1.
   C) insieme delle matrici reali 2×2 a coefficienti non negativi.
   D) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente inferiore al settimo.

2) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $2x - 4y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   C) la conica di equazione $y = 7x^2$ è una parabola.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 0)$ è $3\sqrt{2}$.

4) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due isomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim T(S(U)) = \dim W$.
   B) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   C) $\dim \ker(T \circ S) = 0$.
   D) $\dim ImS = \dim \ker T$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   C) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $2(y - x)$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   D) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

6) Sia $C^\infty(\mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare. Sia $D : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ la trasformazione lineare derivata. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) tutti i numeri reali sono autovalori di D.
B) se la funzione $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ è un autovettore di D allora anche la funzione $f \circ f$ lo è.
C) D ammette almeno un autovettore.
D) D ammette almeno un autovalore.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$.
B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$.
C) se $v_1, \cdots, v_{n+1} \in V$ sono a due a due ortogonali allora almeno uno di essi è nullo.
D) $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$.

8) Si consideri l'insieme $GL_2(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 regolari a coefficienti reali. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra matrici. Allora
A) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un anello.
B) $(GL_2(\mathbf{R}), +)$ è un gruppo.
C) $(GL_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$ è un campo.
D) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un gruppo.

9) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\det(A^2 \cdot B^2 \cdot C^4) = 1$.
B) la matrice $C^3 \cdot B^5 \cdot A$ è regolare.
C) $A \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot B \cdot C \cdot {}^tC = I_n$.
D) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -5t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) la relazione di ortogonalità fra vettori è una relazione di equivalenza.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$.
   C) V ammette un numero infinito di basi ortogonali.
   D) se $v = -w \in V$ allora $\langle v, w\rangle \leq 0$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $A + B + C$ ha determinante nullo.
   B) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = 0$.
   C) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
   D) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.

4) Si considerino sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, \cdot)$ non è un gruppo.
   B) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
   C) $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ è un gruppo commutativo.
   D) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.

5) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 = 3$.
   B) insieme dei polinomi a coefficienti reali che ammettono almeno una radice reale.
   C) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x.
   D) insieme delle successioni reali costanti.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se T è privo di autovalori reali allora il suo polinomio caratteristico non ammette radici reali.

   B) se v è un autovettore di T allora è anche un autovettore di $-T^2 + 4T^5$.
   C) se T ammette n autovalori reali distinti allora $\det A$ coincide con il prodotto di tali autovalori.

   D) $\det A = \det B$ se e solo se T è un isomorfismo.

7) Sia **S** un sistema lineare compatibile di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.
   B) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $n = 2m$ allora lo spazio delle soluzioni di **S** ha dimensione m.
   C) $\rho(C) = \rho(A)$.
   D) ogni soluzione di **S** è anche soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

8) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim ImT = \rho(A)$.
   B) $\dim \ker T^2 = 0$ se e solo se $\det A^2 = 0$.
   C) T^3 è un isomorfismo se e solo se T è un isomorfismo.
   D) $\det A \neq 0$ se e solo se ImT non contiene solo il vettore nullo.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $5x^2 + 4y^2 = 1$ è un'iperbole.
   B) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/2$ radianti.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(0, 0)$ è 10.
   D) se il punto P ha coordinate $(100, 0)$ e il punto Q ha coordinate $(0, -100)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(50, -50)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due isomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim T(S(U)) = \dim W$.
   B) $\dim \ker(T \circ S) = 0$.
   C) $\dim ImS = \dim \ker T$.
   D) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.

2) Sia $C^\infty(\mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare. Sia $D : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ la trasformazione lineare derivata. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) tutti i numeri reali sono autovalori di D.
   B) D ammette almeno un autovettore.
   C) D ammette almeno un autovalore.
   D) se la funzione $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ è un autovettore di D allora anche la funzione $f \circ f$ lo è.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v = -w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \leq 0$.
   B) la relazione di ortogonalità fra vettori è una relazione di equivalenza.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$.
   D) V ammette un numero infinito di basi ortogonali.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   B) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $2(y - x)$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -5t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.

B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.

C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.

D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?

A) se il punto P ha coordinate $(100, 0)$ e il punto Q ha coordinate $(0, -100)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(50, -50)$.

B) la conica di equazione $5x^2 + 4y^2 = 1$ è un'iperbole.

C) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/2$ radianti.

D) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(0, 0)$ è 10.

7) Si consideri l'insieme $GL_2(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 regolari a coefficienti reali. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra matrici. Allora

A) $(GL_2(\mathbf{R}), +)$ è un gruppo.

B) $(GL_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$ è un campo.

C) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un anello.

D) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un gruppo.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) la matrice $C^3 \cdot B^5 \cdot A$ è regolare.

B) $A \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot B \cdot C \cdot {}^tC = I_n$.

C) $\det(A^2 \cdot B^2 \cdot C^4) = 1$.

D) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.

9) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?

A) insieme delle successioni reali che hanno il quarto termine uguale a 1.

B) insieme delle matrici reali 2×2 a coefficienti non negativi.

C) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$.

D) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente inferiore al settimo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.
   B) $A+B+C$ ha determinante nullo.
   C) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = 0$.
   D) $Tr(A+B+C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se T è privo di autovalori reali allora il suo polinomio caratteristico non ammette radici reali.
   B) se v è un autovettore di T allora è anche un autovettore di $-T^2 + 4T^5$.
   C) $\det A = \det B$ se e solo se T è un isomorfismo.
   D) se T ammette n autovalori reali distinti allora $\det A$ coincide con il prodotto di tali autovalori.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$.
   C) $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$.
   D) se $v_1, \cdots, v_{n+1} \in V$ sono a due a due ortogonali allora almeno uno di essi è nullo.

4) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x.
   B) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 = 3$.
   C) insieme dei polinomi a coefficienti reali che ammettono almeno una radice reale.
   D) insieme delle successioni reali costanti.

5) Si considerino sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ è un gruppo commutativo.
   B) $(\mathbf{R}, \cdot)$ non è un gruppo.
   C) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
   D) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.

6) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare compatibile di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.
   B) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $n = 2m$ allora lo spazio delle soluzioni di $\mathbf{S}$ ha dimensione m.
   C) ogni soluzione di $\mathbf{S}$ è anche soluzione del sistema lineare omogeneo associato.
   D) $\rho(C) = \rho(A)$.

8) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim ImT = \rho(A)$.
   B) $\dim \ker T^2 = 0$ se e solo se $\det A^2 = 0$.
   C) $\det A \neq 0$ se e solo se ImT non contiene solo il vettore nullo.
   D) T^3 è un isomorfismo se e solo se T è un isomorfismo.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $2x - 4y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 0)$ è $3\sqrt{2}$.
   D) la conica di equazione $y = 7x^2$ è una parabola.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme dei polinomi a coefficienti reali che ammettono almeno una radice reale.
   B) insieme delle successioni reali costanti.
   C) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x.
   D) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 = 3$.

2) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due isomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   B) $\dim T(S(U)) = \dim W$.
   C) $\dim ImS = \dim \ker T$.
   D) $\dim \ker(T \circ S) = 0$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $2(y - x)$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.

4) Sia $C^\infty(\mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare. Sia $D : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ la trasformazione lineare derivata. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se la funzione $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ è un autovettore di D allora anche la funzione $f \circ f$ lo è.
   B) tutti i numeri reali sono autovalori di D.
   C) D ammette almeno un autovalore.
   D) D ammette almeno un autovettore.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = 0$.
   B) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
   C) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
   D) $A + B + C$ ha determinante nullo.

6) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $y = 7x^2$ è una parabola.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}$.
   C) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $2x - 4y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 0)$ è $3\sqrt{2}$.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v_1, \cdots, v_{n+1} \in V$ sono a due a due ortogonali allora almeno uno di essi è nullo.
   B) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$.
   D) $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$.

9) Si considerino sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
   B) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.
   C) $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ è un gruppo commutativo.
   D) $(\mathbf{R}, \cdot)$ non è un gruppo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -5t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v = -w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \leq 0$.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$.
   C) V ammette un numero infinito di basi ortogonali.
   D) la relazione di ortogonalità fra vettori è una relazione di equivalenza.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $A \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot B \cdot C \cdot {}^tC = I_n$.
   B) la matrice $C^3 \cdot B^5 \cdot A$ è regolare.
   C) $\det(A^2 \cdot B^2 \cdot C^4) = 1$.
   D) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.

4) Si consideri l'insieme $GL_2(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 regolari a coefficienti reali. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra matrici. Allora
   A) $(GL_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$ è un campo.
   B) $(GL_2(\mathbf{R}), +)$ è un gruppo.
   C) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un anello.
   D) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un gruppo.

5) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det A \neq 0$ se e solo se ImT non contiene solo il vettore nullo.
   B) T^3 è un isomorfismo se e solo se T è un isomorfismo.
   C) $\dim ImT = \rho(A)$.
   D) $\dim \ker T^2 = 0$ se e solo se $\det A^2 = 0$.

6) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle matrici reali 2×2 a coefficienti non negativi.
   B) insieme delle successioni reali che hanno il quarto termine uguale a 1.
   C) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$.
   D) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente inferiore al settimo.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) se il punto P ha coordinate $(100, 0)$ e il punto Q ha coordinate $(0, -100)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(50, -50)$.
   B) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/2$ radianti.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(0, 0)$ è 10.
   D) la conica di equazione $5x^2 + 4y^2 = 1$ è un'iperbole.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare compatibile di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) ogni soluzione di $\mathbf{S}$ è anche soluzione del sistema lineare omogeneo associato.
   B) $\rho(C) = \rho(A)$.
   C) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.
   D) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $n = 2m$ allora lo spazio delle soluzioni di $\mathbf{S}$ ha dimensione m.

9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det A = \det B$ se e solo se T è un isomorfismo.
   B) se T ammette n autovalori reali distinti allora $\det A$ coincide con il prodotto di tali autovalori.

   C) se T è privo di autovalori reali allora il suo polinomio caratteristico non ammette radici reali.

   D) se v è un autovettore di T allora è anche un autovettore di $-T^2 + 4T^5$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due isomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim ImS = \dim \ker T$.
   B) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   C) $\dim T(S(U)) = \dim W$.
   D) $\dim \ker(T \circ S) = 0$.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) la relazione di ortogonalità fra vettori è una relazione di equivalenza.
   B) se $v = -w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \leq 0$.
   C) V ammette un numero infinito di basi ortogonali.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   C) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   D) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $2(y - x)$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.

4) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -5t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $5x^2 + 4y^2 = 1$ è un'iperbole.
   B) se il punto P ha coordinate $(100, 0)$ e il punto Q ha coordinate $(0, -100)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(50, -50)$.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(0, 0)$ è 10.
   D) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/2$ radianti.

6) Sia $C^\infty(\mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare. Sia $D : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ la trasformazione lineare derivata. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) D ammette almeno un autovalore.
   B) se la funzione $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ è un autovettore di D allora anche la funzione $f \circ f$ lo è.
   C) tutti i numeri reali sono autovalori di D.
   D) D ammette almeno un autovettore.

7) Si considerino sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.
   B) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
   C) $(\mathbf{R}, \cdot)$ non è un gruppo.
   D) $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ è un gruppo commutativo.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
   B) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = 0$.
   C) $A + B + C$ ha determinante nullo.
   D) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

9) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle successioni reali costanti.
   B) insieme dei polinomi a coefficienti reali che ammettono almeno una radice reale.
   C) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 = 3$.
   D) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri l'insieme $GL_2(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 regolari a coefficienti reali. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra matrici. Allora
   A) $(GL_2(\mathbf{R}), +)$ è un gruppo.
   B) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un anello.
   C) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un gruppo.
   D) $(GL_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$ è un campo.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det A = \det B$ se e solo se T è un isomorfismo.
   B) se T è privo di autovalori reali allora il suo polinomio caratteristico non ammette radici reali.
   C) se T ammette n autovalori reali distinti allora $\det A$ coincide con il prodotto di tali autovalori.
   D) se v è un autovettore di T allora è anche un autovettore di $-T^2 + 4T^5$.

3) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle successioni reali che hanno il quarto termine uguale a 1.
   B) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$.
   C) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente inferiore al settimo.
   D) insieme delle matrici reali 2×2 a coefficienti non negativi.

4) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la matrice $C^3 \cdot B^5 \cdot A$ è regolare.
   B) $\det(A^2 \cdot B^2 \cdot C^4) = 1$.
   C) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   D) $A \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot B \cdot C \cdot {}^tC = I_n$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare compatibile di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) ogni soluzione di $\mathbf{S}$ è anche soluzione del sistema lineare omogeneo associato.
   B) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.
   C) $\rho(C) = \rho(A)$.
   D) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $n = 2m$ allora lo spazio delle soluzioni di $\mathbf{S}$ ha dimensione m.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\det A \neq 0$ se e solo se ImT non contiene solo il vettore nullo.

B) $\dim ImT = \rho(A)$.

C) T^3 è un isomorfismo se e solo se T è un isomorfismo.

D) $\dim \ker T^2 = 0$ se e solo se $\det A^2 = 0$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

A) $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$.

B) se $v_1, \cdots, v_{n+1} \in V$ sono a due a due ortogonali allora almeno uno di essi è nullo.

C) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$.

D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?

A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 0)$ è $3\sqrt{2}$.

B) la conica di equazione $y = 7x^2$ è una parabola.

C) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}$.

D) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $2x - 4y = 0$ sono fra loro ortogonali.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.

C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.

D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}$.
   B) la conica di equazione $y = 7x^2$ è una parabola.
   C) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $2x - 4y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 0)$ è $3\sqrt{2}$.

3) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$.
   B) insieme delle successioni reali che hanno il quarto termine uguale a 1.
   C) insieme delle matrici reali 2×2 a coefficienti non negativi.
   D) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente inferiore al settimo.

4) Sia $C^\infty(\mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare. Sia $D : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ la trasformazione lineare derivata. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) D ammette almeno un autovettore.
   B) se la funzione $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ è un autovettore di D allora anche la funzione $f \circ f$ lo è.
   C) D ammette almeno un autovalore.
   D) tutti i numeri reali sono autovalori di D.

5) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - v, u + v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$.
   B) se $v_1, \cdots, v_{n+1} \in V$ sono a due a due ortogonali allora almeno uno di essi è nullo.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$.
   D) $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$.

6) Si consideri l'insieme $GL_2(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 regolari a coefficienti reali. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra matrici. Allora
   A) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un anello.
   B) $(GL_2(\mathbf{R}), +)$ è un gruppo.
   C) $(GL_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$ è un campo.
   D) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un gruppo.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det(A^2 \cdot B^2 \cdot C^4) = 1$.
   B) la matrice $C^3 \cdot B^5 \cdot A$ è regolare.
   C) $A\cdot\, {}^tA\cdot\, {}^tB\cdot\, B\cdot\, C\cdot\, {}^tC = I_n$.
   D) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.

8) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due isomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim \ker(T \circ S) = 0$.
   B) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   C) $\dim ImS = \dim \ker T$.
   D) $\dim T(S(U)) = \dim W$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $2(y - x)$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   C) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T^3 è un isomorfismo se e solo se T è un isomorfismo.
   B) $\dim \ker T^2 = 0$ se e solo se $\det A^2 = 0$.
   C) $\det A \neq 0$ se e solo se ImT non contiene solo il vettore nullo.
   D) $\dim ImT = \rho(A)$.

2) Si considerino sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
   B) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.
   C) $(\mathbf{R}, \cdot)$ non è un gruppo.
   D) $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ è un gruppo commutativo.

3) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se T ammette n autovalori reali distinti allora $\det A$ coincide con il prodotto di tali autovalori.
   B) se v è un autovettore di T allora è anche un autovettore di $-T^2 + 4T^5$.
   C) $\det A = \det B$ se e solo se T è un isomorfismo.
   D) se T è privo di autovalori reali allora il suo polinomio caratteristico non ammette radici reali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/2$ radianti.
   B) se il punto P ha coordinate $(100, 0)$ e il punto Q ha coordinate $(0, -100)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(50, -50)$.
   C) la conica di equazione $5x^2 + 4y^2 = 1$ è un'iperbole.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(0, 0)$ è 10.

5) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme dei polinomi a coefficienti reali che ammettono almeno una radice reale.
   B) insieme delle successioni reali costanti.
   C) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 = 3$.
   D) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = 0$.
   B) $Tr(A+B+C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
   C) $A+B+C$ ha determinante nullo.
   D) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$.
   B) se $v = -w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \leq 0$.
   C) la relazione di ortogonalità fra vettori è una relazione di equivalenza.
   D) V ammette un numero infinito di basi ortogonali.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare compatibile di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\rho(C) = \rho(A)$.
   B) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $n = 2m$ allora lo spazio delle soluzioni di $\mathbf{S}$ ha dimensione m.
   C) ogni soluzione di $\mathbf{S}$ è anche soluzione del sistema lineare omogeneo associato.
   D) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -5t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due isomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim ImS = \dim \ker T$.
   B) $\dim \ker(T \circ S) = 0$.
   C) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   D) $\dim T(S(U)) = \dim W$.

2) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) **S** ammette infinite soluzioni.
   B) se y è soluzione di **S** allora $2(y - x)$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad **S**.
   C) se le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti allora **S** ammette necessariamente infinite soluzioni.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -5t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) se il punto P ha coordinate $(100, 0)$ e il punto Q ha coordinate $(0, -100)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(50, -50)$.
   B) la conica di equazione $5x^2 + 4y^2 = 1$ è un'iperbole.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(0, 0)$ è 10.
   D) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/2$ radianti.

5) Sia $C^\infty(\mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare. Sia $D : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ la trasformazione lineare derivata. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) D ammette almeno un autovalore.
   B) D ammette almeno un autovettore.
   C) se la funzione $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ è un autovettore di D allora anche la funzione $f \circ f$ lo è.
   D) tutti i numeri reali sono autovalori di D.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v = -w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \leq 0$.
   B) la relazione di ortogonalità fra vettori è una relazione di equivalenza.
   C) V ammette un numero infinito di basi ortogonali.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$.

7) Si consideri l'insieme $GL_2(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 regolari a coefficienti reali. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra matrici. Allora
   A) $(GL_2(\mathbf{R}), +)$ è un gruppo.
   B) $(GL_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$ è un campo.
   C) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un gruppo.
   D) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un anello.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la matrice $C^3 \cdot B^5 \cdot A$ è regolare.
   B) $A \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot B \cdot C \cdot {}^tC = I_n$.
   C) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   D) $\det(A^2 \cdot B^2 \cdot C^4) = 1$.

9) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle successioni reali che hanno il quarto termine uguale a 1.
   B) insieme delle matrici reali 2×2 a coefficienti non negativi.
   C) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente inferiore al settimo.
   D) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $A + B + C$ ha determinante nullo.
   B) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
   C) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
   D) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = 0$.

2) Si considerino sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, \cdot)$ non è un gruppo.
   B) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.
   C) $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ è un gruppo commutativo.
   D) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.

3) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 = 3$.
   B) insieme delle successioni reali costanti.
   C) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x.
   D) insieme dei polinomi a coefficienti reali che ammettono almeno una radice reale.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$.
   C) se $v_1, \cdots, v_{n+1} \in V$ sono a due a due ortogonali allora almeno uno di essi è nullo.
   D) $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare compatibile di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) ogni soluzione di $\mathbf{S}$ è anche soluzione del sistema lineare omogeneo associato.
   B) $\rho(C) = \rho(A)$.
   C) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.
   D) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $n = 2m$ allora lo spazio delle soluzioni di $\mathbf{S}$ ha dimensione m.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\det A \neq 0$ se e solo se ImT non contiene solo il vettore nullo.

B) T^3 è un isomorfismo se e solo se T è un isomorfismo.

C) $\dim ImT = \rho(A)$.

D) $\dim \ker T^2 = 0$ se e solo se $\det A^2 = 0$.

7) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.

B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.

D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?

A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}$.

B) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $2x - 4y = 0$ sono fra loro ortogonali.

C) la conica di equazione $y = 7x^2$ è una parabola.

D) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 0)$ è $3\sqrt{2}$.

9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\det A = \det B$ se e solo se T è un isomorfismo.

B) se T ammette n autovalori reali distinti allora $\det A$ coincide con il prodotto di tali autovalori.

C) se T è privo di autovalori reali allora il suo polinomio caratteristico non ammette radici reali.

D) se v è un autovettore di T allora è anche un autovettore di $-T^2 + 4T^5$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $2(y-x)$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.

2) Sia $C^\infty(\mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare. Sia $D : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ la trasformazione lineare derivata. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) D ammette almeno un autovalore.
   B) D ammette almeno un autovettore.
   C) se la funzione $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ è un autovettore di D allora anche la funzione $f \circ f$ lo è.
   D) tutti i numeri reali sono autovalori di D.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$.
   B) se $v_1, \cdots, v_{n+1} \in V$ sono a due a due ortogonali allora almeno uno di essi è nullo.
   C) $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$.

4) Si considerino sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ è un gruppo commutativo.
   B) $(\mathbf{R}, \cdot)$ non è un gruppo.
   C) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
   D) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}$.
   B) la conica di equazione $y = 7x^2$ è una parabola.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 0)$ è $3\sqrt{2}$.
   D) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $2x - 4y = 0$ sono fra loro ortogonali.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
   B) $A + B + C$ ha determinante nullo.
   C) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = 0$.
   D) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.

8) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x.
   B) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 = 3$.
   C) insieme dei polinomi a coefficienti reali che ammettono almeno una radice reale.
   D) insieme delle successioni reali costanti.

9) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due isomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim ImS = \dim \ker T$.
   B) $\dim \ker(T \circ S) = 0$.
   C) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   D) $\dim T(S(U)) = \dim W$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det(A^2 \cdot B^2 \cdot C^4) = 1$.
   B) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   C) $A \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot B \cdot C \cdot {}^tC = I_n$.
   D) la matrice $C^3 \cdot B^5 \cdot A$ è regolare.

2) Si consideri l'insieme $GL_2(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 regolari a coefficienti reali. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra matrici. Allora
   A) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un anello.
   B) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un gruppo.
   C) $(GL_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$ è un campo.
   D) $(GL_2(\mathbf{R}), +)$ è un gruppo.

3) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T^3 è un isomorfismo se e solo se T è un isomorfismo.
   B) $\det A \neq 0$ se e solo se ImT non contiene solo il vettore nullo.
   C) $\dim \ker T^2 = 0$ se e solo se $\det A^2 = 0$.
   D) $\dim ImT = \rho(A)$.

4) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$.
   B) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente inferiore al settimo.
   C) insieme delle matrici reali 2×2 a coefficienti non negativi.
   D) insieme delle successioni reali che hanno il quarto termine uguale a 1.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -5t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) la relazione di ortogonalità fra vettori è una relazione di equivalenza.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$.
   C) se $v = -w \in V$ allora $\langle v, w\rangle \leq 0$.
   D) V ammette un numero infinito di basi ortogonali.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se T ammette n autovalori reali distinti allora $\det A$ coincide con il prodotto di tali autovalori.
   B) $\det A = \det B$ se e solo se T è un isomorfismo.
   C) se v è un autovettore di T allora è anche un autovettore di $-T^2 + 4T^5$.
   D) se T è privo di autovalori reali allora il suo polinomio caratteristico non ammette radici reali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $5x^2 + 4y^2 = 1$ è un'iperbole.
   B) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/2$ radianti.
   C) se il punto P ha coordinate $(100, 0)$ e il punto Q ha coordinate $(0, -100)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(50, -50)$.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(0, 0)$ è 10.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare compatibile di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\rho(C) = \rho(A)$.
   B) ogni soluzione di $\mathbf{S}$ è anche soluzione del sistema lineare omogeneo associato.
   C) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $n = 2m$ allora lo spazio delle soluzioni di $\mathbf{S}$ ha dimensione m.
   D) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$.
   B) se $v = -w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \leq 0$.
   C) V ammette un numero infinito di basi ortogonali.
   D) la relazione di ortogonalità fra vettori è una relazione di equivalenza.

2) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due isomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   B) $\dim ImS = \dim \ker T$.
   C) $\dim \ker(T \circ S) = 0$.
   D) $\dim T(S(U)) = \dim W$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   B) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $2(y - x)$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/2$ radianti.
   B) se il punto P ha coordinate $(100, 0)$ e il punto Q ha coordinate $(0, -100)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(50, -50)$.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(0, 0)$ è 10.
   D) la conica di equazione $5x^2 + 4y^2 = 1$ è un'iperbole.

5) Si considerino sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
   B) $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ è un gruppo commutativo.
   C) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.
   D) $(\mathbf{R}, \cdot)$ non è un gruppo.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = 0$.

B) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

C) $Tr(A+B+C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.

D) $A+B+C$ ha determinante nullo.

7) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?

A) insieme dei polinomi a coefficienti reali che ammettono almeno una radice reale.

B) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x.

C) insieme delle successioni reali costanti.

D) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 = 3$.

8) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -5t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.

B) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.

C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.

9) Sia $C^\infty(\mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare. Sia $D : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ la trasformazione lineare derivata. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) se la funzione $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ è un autovettore di D allora anche la funzione $f \circ f$ lo è.

B) D ammette almeno un autovalore.

C) D ammette almeno un autovettore.

D) tutti i numeri reali sono autovalori di D.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$.
   B) $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$.
   C) se $v_1, \cdots, v_{n+1} \in V$ sono a due a due ortogonali allora almeno uno di essi è nullo.
   D) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $A \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot B \cdot C \cdot {}^tC = I_n$.
   B) $\det(A^2 \cdot B^2 \cdot C^4) = 1$.
   C) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   D) la matrice $C^3 \cdot B^5 \cdot A$ è regolare.

3) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle matrici reali 2×2 a coefficienti non negativi.
   B) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$.
   C) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente inferiore al settimo.
   D) insieme delle successioni reali che hanno il quarto termine uguale a 1.

4) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare compatibile di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\rho(C) = \rho(A)$.
   B) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.
   C) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $n = 2m$ allora lo spazio delle soluzioni di $\mathbf{S}$ ha dimensione m.
   D) ogni soluzione di $\mathbf{S}$ è anche soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) T^3 è un isomorfismo se e solo se T è un isomorfismo.
B) $\dim ImT = \rho(A)$.
C) $\dim \ker T^2 = 0$ se e solo se $\det A^2 = 0$.
D) $\det A \neq 0$ se e solo se ImT non contiene solo il vettore nullo.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se T ammette n autovalori reali distinti allora $\det A$ coincide con il prodotto di tali autovalori.

B) se T è privo di autovalori reali allora il suo polinomio caratteristico non ammette radici reali.

C) se v è un autovettore di T allora è anche un autovettore di $-T^2 + 4T^5$.
D) $\det A = \det B$ se e solo se T è un isomorfismo.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
A) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $2x - 4y = 0$ sono fra loro ortogonali.
B) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 0)$ è $3\sqrt{2}$.
C) la conica di equazione $y = 7x^2$ è una parabola.
D) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}$.

9) Si consideri l'insieme $GL_2(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 regolari a coefficienti reali. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra matrici. Allora
A) $(GL_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$ è un campo.
B) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un anello.
C) $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ è un gruppo.
D) $(GL_2(\mathbf{R}), +)$ è un gruppo.