2 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 00101

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) nell'insieme dei numeri reali l'usuale operazione di prodotto è commutativa.
   D) esistono anelli dotati di un numero finito di elementi.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $A + B + C$ è invertibile.
   B) $A \cdot {}^tB$ è invertibile.
   C) se $A \cdot C = I$ allora $C \cdot A = I$.
   D) ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x di grado 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(0,0,0,0,1),(0,0,0,1,1),(0,0,1,1,1),(0,1,1,1,1),(1,1,1,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×2 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (0, 0, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.
   B) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($m, n > 0$) è una trasformazione lineare allora il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   C) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore $(1, 1, 1)$ è un endomorfismo.
   D) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora lo è anche $T \circ T$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C e il rango di A sono uguali.
   B) $\mathbf{S}$ può ammettere soluzioni anche nel caso che risulti $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$.
   C) ogni sottospazio vettoriale 3-dimensionale di $M_2(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 4 incognite.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) A^2 è la matrice associata a $T \circ T$ rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   B) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   C) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) se T è l'endomorfismo nullo allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ allora il vettore $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3$ è il vettore nullo.
   B) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $T \circ T$.
   C) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.
   D) $((1, -1), (1, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - z = 0$ e $y + z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
   B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $x + y - z = 2$ è uguale a 1.
   C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 7.
   D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto (z, x, y) è una isometria.

2 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 00110

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è sempre non inferiore a n.
   B) se S è diagonalizzabile e T non lo è allora le matrici A e B non possono essere simili.
   C) se A è una matrice ortogonale allora è diagonalizzabile per similitudine.
   D) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono uguali.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(5, 7, 9)$ sono allineati.
   B) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, -1, -1)$, $(2, -1, 2)$, $(2, 2, -1)$, $(-1, 2, 2)$ è 9.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = t$ e $x = 2 - 3t, y = 2, z = 3t$ è nullo.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $5x - 12y = 13$ è uguale a 1.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 0, y = s, z = t$ e $x = 1, y = t, z = s$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore $\mathbf{v}$ in $3\mathbf{v}$ è una trasformazione lineare.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.
   C) la differenza fra due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   D) tutte le trasformazioni lineari suriettive $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ sono anche biiettive.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) se $\det(A \cdot B) = 0$ allora $\det(B \cdot A) = 0$.
   B) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ allora $B \cdot A = \mathbf{0}$.
   C) se A è l'inversa di B e B è l'inversa di C allora $A = C$.
   D) se n è pari allora $\det(-A) = \det A$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei numeri naturali è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   C) l'insieme dei numeri interi pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle isometrie del piano è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è il traslato di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   B) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette la soluzione nulla allora è un sistema lineare omogeneo.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il numero di equazioni di $\mathbf{S}$ è non superiore a n.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque negative è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno esattamente un termine uguale a 2 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ tali che $a^7_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) detta $(x_1, \dots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $\|\mathbf{v}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
   D) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.

2 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 00111

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.
   B) $A + B + C$ è invertibile.
   C) $A \cdot {}^t B$ è invertibile.
   D) se $A \cdot C = I$ allora $C \cdot A = I$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
   B) ogni sottospazio vettoriale 3-dimensionale di $M_2(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 4 incognite.
   C) $\mathbf{S}$ può ammettere soluzioni anche nel caso che risulti $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C e il rango di A sono uguali.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se T è l'endomorfismo nullo allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   D) A^2 è la matrice associata a $T \circ T$ rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
   C) detta $(x_1, \dots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $\|\mathbf{v}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×2 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x di grado 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(0,0,0,0,1), (0,0,0,1,1), (0,0,1,1,1), (0,1,1,1,1), (1,1,1,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora lo è anche $T \circ T$.
   B) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore $(1, 1, 1)$ è un endomorfismo.
   C) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (0, 0, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 0, y = s, z = t$ e $x = 1, y = t, z = s$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $5x - 12y = 13$ è uguale a 1.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = t$ e $x = 2 - 3t, y = 2, z = 3t$ è nullo.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(5, 7, 9)$ sono allineati.
   D) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, -1, -1)$, $(2, -1, 2)$, $(2, 2, -1)$, $(-1, 2, 2)$ è 9.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono anelli dotati di un numero finito di elementi.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) nell'insieme dei numeri reali l'usuale operazione di prodotto è commutativa.

2 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 01000

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $x + y - z = 2$ è uguale a 1.
   B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 7.
   C) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto (z, x, y) è una isometria.
   D) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il numero di equazioni di $\mathbf{S}$ è non superiore a n.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette la soluzione nulla allora è un sistema lineare omogeneo.
   C) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.
   D) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è il traslato di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle isometrie del piano è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   B) l'insieme dei numeri naturali è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   C) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei numeri interi pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono uguali.
   B) se A è una matrice ortogonale allora è diagonalizzabile per similitudine.
   C) se S è diagonalizzabile e T non lo è allora le matrici A e B non possono essere simili.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è sempre non inferiore a n.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - z = 0$ e $y + z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $T \circ T$.
   B) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.
   C) $((1, -1), (1, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
   D) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ allora il vettore $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3$ è il vettore nullo.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ tali che $a^7_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque negative è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno esattamente un termine uguale a 2 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) se n è pari allora $\det(-A) = \det A$.
   B) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ allora $B \cdot A = \mathbf{0}$.
   C) se $\det(A \cdot B) = 0$ allora $\det(B \cdot A) = 0$.
   D) se A è l'inversa di B e B è l'inversa di C allora $A = C$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) tutte le trasformazioni lineari suriettive $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ sono anche biiettive.
   B) la differenza fra due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.
   D) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore $\mathbf{v}$ in $3\mathbf{v}$ è una trasformazione lineare.

2 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 01001

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) se n è pari allora $\det(-A) = \det A$.
   B) se $\det(A \cdot B) = 0$ allora $\det(B \cdot A) = 0$.
   C) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ allora $B \cdot A = \mathbf{0}$.
   D) se A è l'inversa di B e B è l'inversa di C allora $A = C$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ tali che $a^7_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque negative è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno esattamente un termine uguale a 2 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - z = 0$ e $y + z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (0, 0, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.
   C) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora lo è anche $T \circ T$.
   D) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore $(1, 1, 1)$ è un endomorfismo.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) $\mathbf{S}$ può ammettere soluzioni anche nel caso che risulti $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C e il rango di A sono uguali.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
   D) ogni sottospazio vettoriale 3-dimensionale di $M_2(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 4 incognite.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   B) A^2 è la matrice associata a $T \circ T$ rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   C) se T è l'endomorfismo nullo allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.
   D) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $T \circ T$.
   B) $((1, -1), (1, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
   C) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ allora il vettore $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3$ è il vettore nullo.
   D) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $x + y - z = 2$ è uguale a 1.
   B) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto (z, x, y) è una isometria.
   C) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
   D) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 7.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle isometrie del piano è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   B) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei numeri naturali è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   D) l'insieme dei numeri interi pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 01010

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle\mathbf{u}, -\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$.
   B) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$.
   D) detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $\|\mathbf{v}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se S è diagonalizzabile e T non lo è allora le matrici A e B non possono essere simili.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è sempre non inferiore a n.
   C) se A è una matrice ortogonale allora è diagonalizzabile per similitudine.
   D) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono uguali.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $A \cdot {}^tB$ è invertibile.
   B) se $A \cdot C = I$ allora $C \cdot A = I$.
   C) $A + B + C$ è invertibile.
   D) ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) nell'insieme dei numeri reali l'usuale operazione di prodotto è commutativa.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) esistono anelli dotati di un numero finito di elementi.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 0, y = s, z = t$ e $x = 1, y = t, z = s$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = t$ e $x = 2 - 3t, y = 2, z = 3t$ è nullo.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $5x - 12y = 13$ è uguale a 1.
   C) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, -1, -1)$, $(2, -1, 2)$, $(2, 2, -1)$, $(-1, 2, 2)$ è 9.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(5, 7, 9)$ sono allineati.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.
   B) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore $\mathbf{v}$ in $3\mathbf{v}$ è una trasformazione lineare.
   C) la differenza fra due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   D) tutte le trasformazioni lineari suriettive $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ sono anche biiettive.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x di grado 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×2 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$. Allora
   A) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.
   B) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è il traslato di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette la soluzione nulla allora è un sistema lineare omogeneo.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il numero di equazioni di $\mathbf{S}$ è non superiore a n.

2 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 01011

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ allora $B \cdot A = \mathbf{0}$.
   B) se A è l'inversa di B e B è l'inversa di C allora $A = C$.
   C) se n è pari allora $\det(-A) = \det A$.
   D) se $\det(A \cdot B) = 0$ allora $\det(B \cdot A) = 0$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno esattamente un termine uguale a 2 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ tali che $a^7_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque negative è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   B) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore $(1, 1, 1)$ è un endomorfismo.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (0, 0, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.
   D) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora lo è anche $T \circ T$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) $\mathbf{S}$ può ammettere soluzioni anche nel caso che risulti $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$.
   B) ogni sottospazio vettoriale 3-dimensionale di $M_2(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 4 incognite.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C e il rango di A sono uguali.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0,0)$ e la retta di equazione $5x - 12y = 13$ è uguale a 1.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(5,7,9)$ sono allineati.
   C) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1,-1,-1)$, $(2,-1,2)$, $(2,2,-1)$, $(-1,2,2)$ è 9.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = t$ e $x = 2 - 3t, y = 2, z = 3t$ è nullo.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri naturali è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri interi pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle isometrie del piano è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   D) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) A^2 è la matrice associata a $T \circ T$ rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   D) se T è l'endomorfismo nullo allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
   B) detta $(x_1, \dots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $\|\mathbf{v}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 0, y = s, z = t$ e $x = 1, y = t, z = s$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.

2 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 01100

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$. Allora
   A) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è il traslato di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette la soluzione nulla allora è un sistema lineare omogeneo.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il numero di equazioni di $\mathbf{S}$ è non superiore a n.
   D) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - z = 0$ e $y + z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) esistono anelli dotati di un numero finito di elementi.
   D) nell'insieme dei numeri reali l'usuale operazione di prodotto è commutativa.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 7.
   B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $x + y - z = 2$ è uguale a 1.
   C) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
   D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto (z, x, y) è una isometria.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x di grado 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×2 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $A + B + C$ è invertibile.
   B) $A \cdot {}^t B$ è invertibile.
   C) ${}^t(A \cdot B) = {}^t B \cdot {}^t A$.
   D) se $A \cdot C = I$ allora $C \cdot A = I$.

7) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è sempre non inferiore a n.
   B) se A è una matrice ortogonale allora è diagonalizzabile per similitudine.
   C) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono uguali.
   D) se S è diagonalizzabile e T non lo è allora le matrici A e B non possono essere simili.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore $\mathbf{v}$ in $3\mathbf{v}$ è una trasformazione lineare.
   B) la differenza fra due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   C) tutte le trasformazioni lineari suriettive $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ sono anche biiettive.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.
   B) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $T \circ T$.
   C) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ allora il vettore $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3$ è il vettore nullo.
   D) $((1, -1), (1, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

2 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 01101

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×2 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(0,0,0,0,1),(0,0,0,1,1),(0,0,1,1,1),(0,1,1,1,1),(1,1,1,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x di grado 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - z = 0$ e $y + z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0,0,0)$ e il piano di equazione cartesiana $x + y - z = 2$ è uguale a 1.
   B) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
   C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1,0)$, $(2,3)$, $(4,1)$, $(5,4)$ è uguale a 7.
   D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x,y,z) nel punto (z,x,y) è una isometria.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora lo è anche $T \circ T$.
   B) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore $(1,1,1)$ è un endomorfismo.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x,y,z) = (0,0,x+y+z)$ è una trasformazione lineare.
   D) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m,n > 0)$ è una trasformazione lineare allora il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
   B) ogni sottospazio vettoriale 3-dimensionale di $M_2(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 4 incognite.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C e il rango di A sono uguali.
   D) $\mathbf{S}$ può ammettere soluzioni anche nel caso che risulti $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se T è l'endomorfismo nullo allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) A^2 è la matrice associata a $T \circ T$ rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   D) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $T \circ T$.
   B) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ allora il vettore $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3$ è il vettore nullo.
   C) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.
   D) $((1, -1), (1, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) esistono anelli dotati di un numero finito di elementi.
   C) nell'insieme dei numeri reali l'usuale operazione di prodotto è commutativa.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

9) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $A \cdot {}^tB$ è invertibile.
   B) ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.
   C) se $A \cdot C = I$ allora $C \cdot A = I$.
   D) $A + B + C$ è invertibile.

2 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 01110

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 0, y = s, z = t$ e $x = 1, y = t, z = s$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$.
   C) detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $\|\mathbf{v}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.
   D) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) se A è l'inversa di B e B è l'inversa di C allora $A = C$.
   B) se $\det(A \cdot B) = 0$ allora $\det(B \cdot A) = 0$.
   C) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ allora $B \cdot A = \mathbf{0}$.
   D) se n è pari allora $\det(-A) = \det A$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei numeri naturali è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   D) l'insieme delle isometrie del piano è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno esattamente un termine uguale a 2 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque negative è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ tali che $a^7_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

6) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se S è diagonalizzabile e T non lo è allora le matrici A e B non possono essere simili.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è sempre non inferiore a n.
   C) se A è una matrice ortogonale allora è diagonalizzabile per similitudine.
   D) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono uguali.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$. Allora
   A) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.
   B) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è il traslato di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette la soluzione nulla allora è un sistema lineare omogeneo.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il numero di equazioni di $\mathbf{S}$ è non superiore a n.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.
   B) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore $\mathbf{v}$ in $3\mathbf{v}$ è una trasformazione lineare.
   C) la differenza fra due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   D) tutte le trasformazioni lineari suriettive $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ sono anche biiettive.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = t$ e $x = 2 - 3t, y = 2, z = 3t$ è nullo.
   B) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, -1, -1)$, $(2, -1, 2)$, $(2, 2, -1)$, $(-1, 2, 2)$ è 9.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(5, 7, 9)$ sono allineati.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $5x - 12y = 13$ è uguale a 1.

2 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 01111

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora lo è anche $T \circ T$.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (0, 0, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.
   C) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   D) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore $(1, 1, 1)$ è un endomorfismo.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se T è l'endomorfismo nullo allora $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.
   B) A^2 è la matrice associata a $T \circ T$ rispetto a $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$.
   C) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   D) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

3) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle\mathbf{u}, -\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$.
   D) detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $\|\mathbf{v}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C e il rango di A sono uguali.
   C) $\mathbf{S}$ può ammettere soluzioni anche nel caso che risulti $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$.
   D) ogni sottospazio vettoriale 3-dimensionale di $M_2(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 4 incognite.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 0, y = s, z = t$ e $x = 1, y = t, z = s$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $5x - 12y = 13$ è uguale a 1.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = t$ e $x = 2 - 3t, y = 2, z = 3t$ è nullo.
   C) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, -1, -1)$, $(2, -1, 2)$, $(2, 2, -1)$, $(-1, 2, 2)$ è 9.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(5, 7, 9)$ sono allineati.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono anelli dotati di un numero finito di elementi.
   B) nell'insieme dei numeri reali l'usuale operazione di prodotto è commutativa.
   C) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.
   B) se $A \cdot C = I$ allora $C \cdot A = I$.
   C) $A \cdot {}^tB$ è invertibile.
   D) $A + B + C$ è invertibile.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×2 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x di grado 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ allora $B \cdot A = \mathbf{0}$.
   B) se A è l'inversa di B e B è l'inversa di C allora $A = C$.
   C) se $\det(A \cdot B) = 0$ allora $\det(B \cdot A) = 0$.
   D) se n è pari allora $\det(-A) = \det A$.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se S è diagonalizzabile e T non lo è allora le matrici A e B non possono essere simili.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è sempre non inferiore a n.
   C) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono uguali.
   D) se A è una matrice ortogonale allora è diagonalizzabile per similitudine.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $T \circ T$.
   B) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ allora il vettore $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3$ è il vettore nullo.
   C) $((1, -1), (1, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
   D) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno esattamente un termine uguale a 2 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque negative è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ tali che $a^7_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri naturali è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri interi pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle isometrie del piano è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - z = 0$ e $y + z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

7) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti se e solo se **S** non ammette soluzioni.
   B) l'insieme delle soluzioni di **S** è il traslato di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   C) **S** ammette soluzione se e solo se il numero di equazioni di **S** è non superiore a n.
   D) se **S** ammette la soluzione nulla allora è un sistema lineare omogeneo.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.
   B) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore $\mathbf{v}$ in $3\mathbf{v}$ è una trasformazione lineare.
   C) tutte le trasformazioni lineari suriettive $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ sono anche biiettive.
   D) la differenza fra due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $x + y - z = 2$ è uguale a 1.
   B) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
   C) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto (z, x, y) è una isometria.
   D) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 7.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque negative è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ tali che $a^7_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno esattamente un termine uguale a 2 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore $(1, 1, 1)$ è un endomorfismo.
   B) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora lo è anche $T \circ T$.
   C) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (0, 0, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale 3-dimensionale di $M_2(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 4 incognite.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
   C) $\mathbf{S}$ può ammettere soluzioni anche nel caso che risulti $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C e il rango di A sono uguali.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) se T è l'endomorfismo nullo allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.
   C) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   D) A^2 è la matrice associata a $T \circ T$ rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) se $\det(A \cdot B) = 0$ allora $\det(B \cdot A) = 0$.
   B) se n è pari allora $\det(-A) = \det A$.
   C) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ allora $B \cdot A = \mathbf{0}$.
   D) se A è l'inversa di B e B è l'inversa di C allora $A = C$.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - z = 0$ e $y + z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 7.
   B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $x + y - z = 2$ è uguale a 1.
   C) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
   D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto (z, x, y) è una isometria.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.
   B) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $T \circ T$.
   C) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ allora il vettore $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3$ è il vettore nullo.
   D) $((1, -1), (1, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle isometrie del piano è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   C) l'insieme dei numeri naturali è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   D) l'insieme dei numeri interi pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 0, y = s, z = t$ e $x = 1, y = t, z = s$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$.
   C) detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $\|\mathbf{v}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot C = I$ allora $C \cdot A = I$.
   B) ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.
   C) $A \cdot {}^tB$ è invertibile.
   D) $A + B + C$ è invertibile.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) nell'insieme dei numeri reali l'usuale operazione di prodotto è commutativa.
   B) esistono anelli dotati di un numero finito di elementi.
   C) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) tutte le trasformazioni lineari suriettive $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ sono anche biiettive.
   B) la differenza fra due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.
   D) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore $\mathbf{v}$ in $3\mathbf{v}$ è una trasformazione lineare.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
  A) l'insieme $\{(0,0,0,0,1),(0,0,0,1,1),(0,0,1,1,1),(0,1,1,1,1),(1,1,1,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
  B) l'insieme delle matrici reali 4×2 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
  C) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
  D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x di grado 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0,0)$ e la retta di equazione $5x - 12y = 13$ è uguale a 1.
  B) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1,-1,-1)$, $(2,-1,2)$, $(2,2,-1)$, $(-1,2,2)$ è 9.
  C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(5,7,9)$ sono allineati.
  D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = t$ e $x = 2 - 3t, y = 2, z = 3t$ è nullo.

8) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$. Allora
  A) **S** ammette soluzione se e solo se il numero di equazioni di **S** è non superiore a n.
  B) se **S** ammette la soluzione nulla allora è un sistema lineare omogeneo.
  C) le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti se e solo se **S** non ammette soluzioni.
  D) l'insieme delle soluzioni di **S** è il traslato di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

9) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
  A) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono uguali.
  B) se A è una matrice ortogonale allora è diagonalizzabile per similitudine.
  C) se S è diagonalizzabile e T non lo è allora le matrici A e B non possono essere simili.
  D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è sempre non inferiore a n.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   B) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore $(1, 1, 1)$ è un endomorfismo.
   C) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora lo è anche $T \circ T$.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (0, 0, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
   B) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
   C) detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $\|\mathbf{v}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) $\mathbf{S}$ può ammettere soluzioni anche nel caso che risulti $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$.
   B) ogni sottospazio vettoriale 3-dimensionale di $M_2(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 4 incognite.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C e il rango di A sono uguali.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 0, y = s, z = t$ e $x = 1, y = t, z = s$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = t$ e $x = 2 - 3t, y = 2, z = 3t$ è nullo.
  B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $5x - 12y = 13$ è uguale a 1.
  C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(5, 7, 9)$ sono allineati.
  D) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, -1, -1)$, $(2, -1, 2)$, $(2, 2, -1)$, $(-1, 2, 2)$ è 9.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
  A) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
  B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
  C) se T è l'endomorfismo nullo allora $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.
  D) A^2 è la matrice associata a $T \circ T$ rispetto a $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
  A) l'insieme delle isometrie del piano è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
  B) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
  C) l'insieme dei numeri interi pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
  D) l'insieme dei numeri naturali è un gruppo rispetto all'operazione di somma.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
  A) se n è pari allora $\det(-A) = \det A$.
  B) se $\det(A \cdot B) = 0$ allora $\det(B \cdot A) = 0$.
  C) se A è l'inversa di B e B è l'inversa di C allora $A = C$.
  D) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ allora $B \cdot A = \mathbf{0}$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
  A) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ tali che $a^7_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
  B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque negative è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
  C) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno esattamente un termine uguale a 2 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
  D) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).

2 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 10100

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono anelli dotati di un numero finito di elementi.
   B) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) nell'insieme dei numeri reali l'usuale operazione di prodotto è commutativa.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono uguali.
   B) se S è diagonalizzabile e T non lo è allora le matrici A e B non possono essere simili.
   C) se A è una matrice ortogonale allora è diagonalizzabile per similitudine.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è sempre non inferiore a n.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×2 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x di grado 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(0,0,0,0,1),(0,0,0,1,1),(0,0,1,1,1),(0,1,1,1,1),(1,1,1,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

4) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.
   B) $A \cdot {}^tB$ è invertibile.
   C) $A + B + C$ è invertibile.
   D) se $A \cdot C = I$ allora $C \cdot A = I$.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) **S** ammette soluzione se e solo se il numero di equazioni di **S** è non superiore a n.
   B) le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti se e solo se **S** non ammette soluzioni.
   C) se **S** ammette la soluzione nulla allora è un sistema lineare omogeneo.
   D) l'insieme delle soluzioni di **S** è il traslato di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) tutte le trasformazioni lineari suriettive $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ sono anche biiettive.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.
   C) la differenza fra due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   D) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore $\mathbf{v}$ in $3\mathbf{v}$ è una trasformazione lineare.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) $((1, -1), (1, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
   B) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.
   C) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $T \circ T$.
   D) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ allora il vettore $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3$ è il vettore nullo.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto (z, x, y) è una isometria.
   B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 7.
   C) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $x + y - z = 2$ è uguale a 1.
   D) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - z = 0$ e $y + z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - z = 0$ e $y + z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $x + y - z = 2$ è uguale a 1.
   B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 7.
   C) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
   D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto (z, x, y) è una isometria.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×2 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x di grado 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) A^2 è la matrice associata a $T \circ T$ rispetto a $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   D) se T è l'endomorfismo nullo allora $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.

5) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $T \circ T$.
   B) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.
   C) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ allora il vettore $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3$ è il vettore nullo.
   D) $((1, -1), (1, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) esistono anelli dotati di un numero finito di elementi.
   C) nell'insieme dei numeri reali l'usuale operazione di prodotto è commutativa.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $A \cdot {}^tB$ è invertibile.
   B) ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.
   C) se $A \cdot C = I$ allora $C \cdot A = I$.
   D) $A + B + C$ è invertibile.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (0, 0, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.
   B) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore $(1, 1, 1)$ è un endomorfismo.
   C) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   D) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora lo è anche $T \circ T$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C e il rango di A sono uguali.
   B) ogni sottospazio vettoriale 3-dimensionale di $M_2(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 4 incognite.
   C) $\mathbf{S}$ può ammettere soluzioni anche nel caso che risulti $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la differenza fra due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   B) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore $\mathbf{v}$ in $3\mathbf{v}$ è una trasformazione lineare.
   C) tutte le trasformazioni lineari suriettive $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ sono anche biiettive.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle isometrie del piano è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   C) l'insieme dei numeri interi pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei numeri naturali è un gruppo rispetto all'operazione di somma.

3) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A è una matrice ortogonale allora è diagonalizzabile per similitudine.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è sempre non inferiore a n.
   C) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono uguali.
   D) se S è diagonalizzabile e T non lo è allora le matrici A e B non possono essere simili.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1,-1,-1)$, $(2,-1,2)$, $(2,2,-1)$, $(-1,2,2)$ è 9.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0,0)$ e la retta di equazione $5x - 12y = 13$ è uguale a 1.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = t$ e $x = 2 - 3t, y = 2, z = 3t$ è nullo.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(5,7,9)$ sono allineati.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque negative è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ tali che $a^7_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno esattamente un termine uguale a 2 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) se $\det(A \cdot B) = 0$ allora $\det(B \cdot A) = 0$.
   B) se n è pari allora $\det(-A) = \det A$.
   C) se A è l'inversa di B e B è l'inversa di C allora $A = C$.
   D) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ allora $B \cdot A = \mathbf{0}$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$.
   B) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
   D) detta $(x_1, \dots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $\|\mathbf{v}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) se $\mathbf{S}$ ammette la soluzione nulla allora è un sistema lineare omogeneo.
   B) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è il traslato di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il numero di equazioni di $\mathbf{S}$ è non superiore a n.
   D) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 0, y = s, z = t$ e $x = 1, y = t, z = s$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

2 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 10111

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (0, 0, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.
   C) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore $(1, 1, 1)$ è un endomorfismo.
   D) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora lo è anche $T \circ T$.

2) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) **S** può ammettere soluzioni anche nel caso che risulti $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$.
   B) **S** ammette soluzione se e solo se il rango di C e il rango di A sono uguali.
   C) ogni sottospazio vettoriale 3-dimensionale di $M_2(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 4 incognite.
   D) se le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti allora **S** non può ammettere soluzioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 0, y = s, z = t$ e $x = 1, y = t, z = s$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $5x - 12y = 13$ è uguale a 1.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = t$ e $x = 2 - 3t, y = 2, z = 3t$ è nullo.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(5, 7, 9)$ sono allineati.
   D) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, -1, -1)$, $(2, -1, 2)$, $(2, 2, -1)$, $(-1, 2, 2)$ è 9.

5) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   B) A^2 è la matrice associata a $T \circ T$ rispetto a $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$.
   C) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) se T è l'endomorfismo nullo allora $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
   C) detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $\|\mathbf{v}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono anelli dotati di un numero finito di elementi.
   B) nell'insieme dei numeri reali l'usuale operazione di prodotto è commutativa.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.
   B) se $A \cdot C = I$ allora $C \cdot A = I$.
   C) $A + B + C$ è invertibile.
   D) $A \cdot {}^tB$ è invertibile.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×2 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(0,0,0,0,1), (0,0,0,1,1), (0,0,1,1,1), (0,1,1,1,1), (1,1,1,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x di grado 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) se A è l'inversa di B e B è l'inversa di C allora $A = C$.
   B) se n è pari allora $\det(-A) = \det A$.
   C) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ allora $B \cdot A = \mathbf{0}$.
   D) se $\det(A \cdot B) = 0$ allora $\det(B \cdot A) = 0$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle isometrie del piano è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   C) l'insieme dei numeri naturali è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   D) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno esattamente un termine uguale a 2 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ tali che $a^7_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque negative è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $T \circ T$.
   B) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ allora il vettore $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3$ è il vettore nullo.
   C) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.
   D) $((1, -1), (1, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$. Allora
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il numero di equazioni di $\mathbf{S}$ è non superiore a n.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette la soluzione nulla allora è un sistema lineare omogeneo.
   C) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.
   D) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è il traslato di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) tutte le trasformazioni lineari suriettive $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ sono anche biiettive.
   B) la differenza fra due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.
   D) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore $\mathbf{v}$ in $3\mathbf{v}$ è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - z = 0$ e $y + z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $x + y - z = 2$ è uguale a 1.
   B) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
   C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 7.
   D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto (z, x, y) è una isometria.

9) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono uguali.
   B) se A è una matrice ortogonale allora è diagonalizzabile per similitudine.
   C) se S è diagonalizzabile e T non lo è allora le matrici A e B non possono essere simili.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è sempre non inferiore a n.

2 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 11001

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) $\mathbf{S}$ può ammettere soluzioni anche nel caso che risulti $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C e il rango di A sono uguali.
   C) ogni sottospazio vettoriale 3-dimensionale di $M_2(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 4 incognite.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   B) A^2 è la matrice associata a $T \circ T$ rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   C) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) se T è l'endomorfismo nullo allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $T \circ T$.
   B) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.
   C) $((1, -1), (1, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
   D) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ allora il vettore $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3$ è il vettore nullo.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri naturali è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri interi pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle isometrie del piano è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - z = 0$ e $y + z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0,0,0)$ e il piano di equazione cartesiana $x+y-z=2$ è uguale a 1.

B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1,0)$, $(2,3)$, $(4,1)$, $(5,4)$ è uguale a 7.

C) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x,y,z) nel punto (z,x,y) è una isometria.

D) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora

A) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ allora $B \cdot A = \mathbf{0}$.

B) se A è l'inversa di B e B è l'inversa di C allora $A = C$.

C) se $\det(A \cdot B) = 0$ allora $\det(B \cdot A) = 0$.

D) se n è pari allora $\det(-A) = \det A$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).

B) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno esattamente un termine uguale a 2 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque negative è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

D) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ tali che $a^7_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):

A) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m,n > 0)$ è una trasformazione lineare allora il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x,y,z) = (0,0,x+y+z)$ è una trasformazione lineare.

C) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore $(1,1,1)$ è un endomorfismo.

D) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora lo è anche $T \circ T$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $A \cdot {}^t B$ è invertibile.
   B) $A + B + C$ è invertibile.
   C) se $A \cdot C = I$ allora $C \cdot A = I$.
   D) ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) nell'insieme dei numeri reali l'usuale operazione di prodotto è commutativa.
   D) esistono anelli dotati di un numero finito di elementi.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la differenza fra due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   B) tutte le trasformazioni lineari suriettive $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ sono anche biiettive.
   C) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore $\mathbf{v}$ in $3\mathbf{v}$ è una trasformazione lineare.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x di grado 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(0,0,0,0,1), (0,0,0,1,1), (0,0,1,1,1), (0,1,1,1,1), (1,1,1,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×2 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 0, y = s, z = t$ e $x = 1, y = t, z = s$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$.
   C) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
   D) detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $\|\mathbf{v}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

7) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A è una matrice ortogonale allora è diagonalizzabile per similitudine.
   B) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono uguali.
   C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è sempre non inferiore a n.
   D) se S è diagonalizzabile e T non lo è allora le matrici A e B non possono essere simili.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = t$ e $x = 2 - 3t, y = 2, z = 3t$ è nullo.
   B) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, -1, -1)$, $(2, -1, 2)$, $(2, 2, -1)$, $(-1, 2, 2)$ è 9.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $5x - 12y = 13$ è uguale a 1.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(5, 7, 9)$ sono allineati.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$. Allora
   A) se $\mathbf{S}$ ammette la soluzione nulla allora è un sistema lineare omogeneo.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il numero di equazioni di $\mathbf{S}$ è non superiore a n.
   C) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è il traslato di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   D) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$.
   B) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
   C) detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $\|\mathbf{v}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore $(1, 1, 1)$ è un endomorfismo.
   B) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (0, 0, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.
   D) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora lo è anche $T \circ T$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale 3-dimensionale di $M_2(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 4 incognite.
   B) $\mathbf{S}$ può ammettere soluzioni anche nel caso che risulti $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C e il rango di A sono uguali.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, -1, -1)$, $(2, -1, 2)$, $(2, 2, -1)$, $(-1, 2, 2)$ è 9.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $5x - 12y = 13$ è uguale a 1.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(5, 7, 9)$ sono allineati.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = t$ e $x = 2 - 3t, y = 2, z = 3t$ è nullo.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
  A) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
  B) l'insieme dei numeri naturali è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
  C) l'insieme delle isometrie del piano è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
  D) l'insieme dei numeri interi pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
  A) se $\det(A \cdot B) = 0$ allora $\det(B \cdot A) = 0$.
  B) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ allora $B \cdot A = \mathbf{0}$.
  C) se n è pari allora $\det(-A) = \det A$.
  D) se A è l'inversa di B e B è l'inversa di C allora $A = C$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
  A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque negative è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
  B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
  C) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ tali che $a^7_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
  D) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno esattamente un termine uguale a 2 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 0, y = s, z = t$ e $x = 1, y = t, z = s$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
  A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
  B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
  C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
  D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
  A) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
  B) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
  C) A^2 è la matrice associata a $T \circ T$ rispetto a $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$.
  D) se T è l'endomorfismo nullo allora $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.

2 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 11100

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ allora il vettore $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3$ è il vettore nullo.
   B) $((1, -1), (1, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
   C) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.
   D) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $T \circ T$.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot C = I$ allora $C \cdot A = I$.
   B) $A \cdot {}^t B$ è invertibile.
   C) $A + B + C$ è invertibile.
   D) ${}^t(A \cdot B) = {}^t B \cdot {}^t A$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x di grado 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×2 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - z = 0$ e $y + z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$. Allora
   A) se $\mathbf{S}$ ammette la soluzione nulla allora è un sistema lineare omogeneo.
   B) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.
   C) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è il traslato di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il numero di equazioni di $\mathbf{S}$ è non superiore a n.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la differenza fra due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.
   C) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore $\mathbf{v}$ in $3\mathbf{v}$ è una trasformazione lineare.
   D) tutte le trasformazioni lineari suriettive $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ sono anche biiettive.

7) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A è una matrice ortogonale allora è diagonalizzabile per similitudine.
   B) se S è diagonalizzabile e T non lo è allora le matrici A e B non possono essere simili.
   C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è sempre non inferiore a n.
   D) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono uguali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
   B) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto (z, x, y) è una isometria.
   C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 7.
   D) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $x + y - z = 2$ è uguale a 1.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) nell'insieme dei numeri reali l'usuale operazione di prodotto è commutativa.
   B) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) esistono anelli dotati di un numero finito di elementi.