Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_7$ delle classi di resto modulo 7 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 7.
   B) l'insieme delle trasformazioni lineari da uno spazio vettoriale reale V ad uno spazio vettoriale reale W è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di trasformazioni lineari.
   C) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme dei numeri reali positivi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

2) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $A \cdot B$ è uguale ad una matrice invertibile allora le due matrici A, B sono invertibili.
   B) A è trasformabile in una matrice nulla mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   C) se B contiene due colonne uguali il suo determinante è nullo.
   D) $\det B = \sum_{i=1}^{n} b_i^h B_i^h$ per ogni indice h compreso fra 1 ed n (B_i^h denota il complemento algebrico dell'elemento B_i^h in B).

3) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se $\dim V = k$ allora V ammette esattamente k basi distinte.
   B) $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$.
   C) se B è una base di U esiste un sottoinsieme Y di V tale che $B \cup Y$ è una base di V.
   D) un sottoinsieme di V è una base di V se e solo se è linearmente indipendente.

4) Sia S un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata ad S rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se H è un sistema di generatori per V allora anche $S^{-1}(H)$ è un sistema di generatori per V.
   B) $Ker\ S = Im\ S$.
   C) le righe di A sono linearmente indipendenti.
   D) A è invertibile.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette più di una soluzione.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A) - n$.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se, detto $p(t)$ il polinomio caratteristico di T, si ha che $p(\lambda) \neq 0$.
   B) se $\det A = 0$ allora T ammette solamente l'autovalore nullo.
   C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è non superiore ad n.
   D) il polinomio caratteristico di T ha grado 1.

7) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   B) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   C) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   D) ogni sottoinsieme non ortogonale di V è linearmente dipendente.

8) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x + 2y = 5$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano non ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $5x - y = -3$ e $x + 5y = 3$ sono fra loro ortogonali.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 4)$ e la retta di equazione $-2x + 2y + 2 = 0$ è $2\sqrt{2}$.
   C) la conica di equazione $y = -37x^2$ è una parabola.
   D) siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $2\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

   B) $\mu \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V c'è un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v}$.
   C) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
   D) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $x + y - 2 = 0$ è $\sqrt{2}$.
   C) la conica di equazione $50y^2 + 100x^2 = 1$ è una ellisse.
   D) le rette di equazioni cartesiane $3x = 2$ e $3x + 4y = 2$ sono fra loro parallele.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4s + 1 \\ z = -t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T è non suriettivo se e solo se $\rho(A) = 0$.
   B) se H è un sistema di generatori per V allora $T(H)$ è un sistema di generatori per $T(V)$.
   C) T è non iniettivo se e solo se $\dim Ker\ T \neq 0$.
   D) se $T \circ T = T$ allora T è l'identità.

5) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A si ottiene da B scambiando fra loro di posto due colonne allora $\det A = \det B$.
   B) se A è ortogonale si ha che $|\det A| = 1$.
   C) $2A + B = B + 2A$.
   D) se B è triangolare il suo determinante è nullo.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 2.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   D) l'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   B) se C non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.

8) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) esiste almeno una base di U che è anche una base di W.
   B) se $\dim V = n$ allora per ogni numero naturale $m \leq n$ esiste una base di V con esattamente m elementi.
   C) se U e W hanno in comune il solo vettore nullo allora $\dim U + \dim W = \dim(U + W)$.
   D) se B è una base di V allora B è un sistema di generatori per V linearmente indipendente.

9) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $n \geq 2$ allora V ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.
   B) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \ldots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \ldots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (u^i + v^i)$.
   C) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim V - \dim U$.
   D) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det B = \sum_{i=1}^{n} b_i^h B_i^h$ per ogni indice h compreso fra 1 ed n (B_i^h denota il complemento algebrico dell'elemento B_i^h in B).
   B) se $A \cdot B$ è uguale ad una matrice invertibile allora le due matrici A, B sono invertibili.
   C) A è trasformabile in una matrice nulla mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   D) se B contiene due colonne uguali il suo determinante è nullo.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A) - n$.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   D) se A non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette più di una soluzione.

3) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il polinomio caratteristico di T ha grado 1.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è non superiore ad n.
   C) se $\det A = 0$ allora T ammette solamente l'autovalore nullo.
   D) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se, detto $p(t)$ il polinomio caratteristico di T, si ha che $p(\lambda) \neq 0$.

4) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   B) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim V - \dim U$.
   C) se $n \geq 2$ allora V ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.
   D) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \dots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (u^i + v^i)$.

5) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) un sottoinsieme di V è una base di V se e solo se è linearmente indipendente.
   B) se $\dim V = k$ allora V ammette esattamente k basi distinte.
   C) $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$.
   D) se B è una base di U esiste un sottoinsieme Y di V tale che $B \cup Y$ è una base di V.

6) Sia S un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata ad S rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è invertibile.
   B) le righe di A sono linearmente indipendenti.
   C) $Ker\ S = Im\ S$.
   D) se H è un sistema di generatori per V allora anche $S^{-1}(H)$ è un sistema di generatori per V.

7) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4s + 1 \\ z = -t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle x.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $3x = 2$ e $3x + 4y = 2$ sono fra loro parallele.
   B) la conica di equazione $50y^2 + 100x^2 = 1$ è una ellisse.
   C) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $x + y - 2 = 0$ è $\sqrt{2}$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei numeri reali positivi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_7$ delle classi di resto modulo 7 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 7.
   C) l'insieme delle trasformazioni lineari da uno spazio vettoriale reale V ad uno spazio vettoriale reale W è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di trasformazioni lineari.
   D) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 4)$ e la retta di equazione $-2x+2y+2=0$ è $2\sqrt{2}$.
   B) la conica di equazione $y = -37x^2$ è una parabola.
   C) siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $2\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.
   D) le rette di equazioni cartesiane $5x - y = -3$ e $x + 5y = 3$ sono fra loro ortogonali.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   C) se C non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 2.
   D) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.

4) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
   C) $\mu \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V c'è un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v}$.
   D) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x + 2y = 5$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano non ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

6) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   B) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   C) ogni sottoinsieme non ortogonale di V è linearmente dipendente.
   D) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.

7) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se B è una base di V allora B è un sistema di generatori per V linearmente indipendente.
   B) se $\dim V = n$ allora per ogni numero naturale $m \leq n$ esiste una base di V con esattamente m elementi.
   C) esiste almeno una base di U che è anche una base di W.
   D) se U e W hanno in comune il solo vettore nullo allora $\dim U + \dim W = \dim(U + W)$.

8) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se B è triangolare il suo determinante è nullo.
   B) se A è ortogonale si ha che $|\det A| = 1$.
   C) se A si ottiene da B scambiando fra loro di posto due colonne allora $\det A = \det B$.
   D) $2A + B = B + 2A$.

9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $T \circ T = T$ allora T è l'identità.
   B) T è non iniettivo se e solo se $\dim Ker\ T \neq 0$.
   C) se H è un sistema di generatori per V allora $T(H)$ è un sistema di generatori per $T(V)$.
   D) T è non suriettivo se e solo se $\rho(A) = 0$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se B è triangolare il suo determinante è nullo.
   B) se A si ottiene da B scambiando fra loro di posto due colonne allora $\det A = \det B$.
   C) se A è ortogonale si ha che $|\det A| = 1$.
   D) $2A + B = B + 2A$.

2) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se B è una base di V allora B è un sistema di generatori per V linearmente indipendente.
   B) esiste almeno una base di U che è anche una base di W.
   C) se $\dim V = n$ allora per ogni numero naturale $m \leq n$ esiste una base di V con esattamente m elementi.
   D) se U e W hanno in comune il solo vettore nullo allora $\dim U + \dim W = \dim(U + W)$.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x + 2y = 5$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano non ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.

4) Sia S un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata ad S rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $Ker\ S = Im\ S$.
   B) se H è un sistema di generatori per V allora anche $S^{-1}(H)$ è un sistema di generatori per V.
   C) A è invertibile.
   D) le righe di A sono linearmente indipendenti.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   B) se A non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette più di una soluzione.
   C) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A) - n$.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\det A = 0$ allora T ammette solamente l'autovalore nullo.
   B) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se, detto $p(t)$ il polinomio caratteristico di T, si ha che $p(\lambda) \neq 0$.
   C) il polinomio caratteristico di T ha grado 1.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è non superiore ad n.

7) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   B) ogni sottoinsieme non ortogonale di V è linearmente dipendente.
   C) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   D) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 4)$ e la retta di equazione $-2x + 2y + 2 = 0$ è $2\sqrt{2}$.
   B) siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $2\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.
   C) le rette di equazioni cartesiane $5x - y = -3$ e $x + 5y = 3$ sono fra loro ortogonali.
   D) la conica di equazione $y = -37x^2$ è una parabola.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 2.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim V - \dim U$.
   B) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle < 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   C) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1,\dots,u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1,\dots,v^n)$ allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^n (u^i + v^i)$.
   D) se $n \geq 2$ allora V ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.

2) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mu \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V c'è un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v}$.
   B) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
   C) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
   D) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

3) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è trasformabile in una matrice nulla mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   B) se B contiene due colonne uguali il suo determinante è nullo.
   C) se $A \cdot B$ è uguale ad una matrice invertibile allora le due matrici A, B sono invertibili.
   D) $\det B = \sum_{i=1}^n b_i^h B_i^h$ per ogni indice h compreso fra 1 ed n (B_i^h denota il complemento algebrico dell'elemento B_i^h in B).

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle trasformazioni lineari da uno spazio vettoriale reale V ad uno spazio vettoriale reale W è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di trasformazioni lineari.
   B) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_7$ delle classi di resto modulo 7 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 7.
   D) l'insieme dei numeri reali positivi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4s + 1 \\ z = -t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle x.
D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?

A) la conica di equazione $50y^2 + 100x^2 = 1$ è una ellisse.
B) le rette di equazioni cartesiane $3x = 2$ e $3x + 4y = 2$ sono fra loro parallele.
C) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $x + y - 2 = 0$ è $\sqrt{2}$.
D) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) se H è un sistema di generatori per V allora $T(H)$ è un sistema di generatori per $T(V)$.
B) T è non suriettivo se e solo se $\rho(A) = 0$.
C) T è non iniettivo se e solo se $\dim Ker\ T \neq 0$.
D) se $T \circ T = T$ allora T è l'identità.

8) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora

A) $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$.
B) se B è una base di U esiste un sottoinsieme Y di V tale che $B \cup Y$ è una base di V.
C) se $\dim V = k$ allora V ammette esattamente k basi distinte.
D) un sottoinsieme di V è una base di V se e solo se è linearmente indipendente.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) se C non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
C) se $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione allora $\rho(A) < \rho(C)$.
D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A è ortogonale si ha che $|\det A| = 1$.
   B) $2A + B = B + 2A$.
   C) se B è triangolare il suo determinante è nullo.
   D) se A si ottiene da B scambiando fra loro di posto due colonne allora $\det A = \det B$.

2) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se $\dim V = n$ allora per ogni numero naturale $m \leq n$ esiste una base di V con esattamente m elementi.
   B) se U e W hanno in comune il solo vettore nullo allora $\dim U + \dim W = \dim(U + W)$.
   C) se B è una base di V allora B è un sistema di generatori per V linearmente indipendente.
   D) esiste almeno una base di U che è anche una base di W.

3) Sia S un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata ad S rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $Ker\ S = Im\ S$.
   B) le righe di A sono linearmente indipendenti.
   C) se H è un sistema di generatori per V allora anche $S^{-1}(H)$ è un sistema di generatori per V.
   D) A è invertibile.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
   C) se A non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette più di una soluzione.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A) - n$.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $3x = 2$ e $3x + 4y = 2$ sono fra loro parallele.
   B) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $x + y - 2 = 0$ è $\sqrt{2}$.
   D) la conica di equazione $50y^2 + 100x^2 = 1$ è una ellisse.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   C) l'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 2.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\det A = 0$ allora T ammette solamente l'autovalore nullo.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è non superiore ad n.
   C) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se, detto $p(t)$ il polinomio caratteristico di T, si ha che $p(\lambda) \neq 0$.
   D) il polinomio caratteristico di T ha grado 1.

8) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   B) se $n \geq 2$ allora V ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.
   C) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \dots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n (u^i + v^i)$.
   D) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim V - \dim U$.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4s + 1 \\ z = -t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   B) se **S** ammette esattamente una soluzione allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   C) se le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti allora **S** non ammette alcuna soluzione.
   D) se C non ha rango massimo allora **S** ammette infinite soluzioni.

2) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x + 2y = 5$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano non ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_7$ delle classi di resto modulo 7 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 7.
   B) l'insieme delle trasformazioni lineari da uno spazio vettoriale reale V ad uno spazio vettoriale reale W è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di trasformazioni lineari.
   C) l'insieme dei numeri reali positivi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $y = -37x^2$ è una parabola.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 4)$ e la retta di equazione $-2x + 2y + 2 = 0$ è $2\sqrt{2}$.
   C) le rette di equazioni cartesiane $5x - y = -3$ e $x + 5y = 3$ sono fra loro ortogonali.
   D) siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $2\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

5) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se $\dim V = k$ allora V ammette esattamente k basi distinte.
   B) $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$.
   C) un sottoinsieme di V è una base di V se e solo se è linearmente indipendente.
   D) se B è una base di U esiste un sottoinsieme Y di V tale che $B \cup Y$ è una base di V.

6) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $A \cdot B$ è uguale ad una matrice invertibile allora le due matrici A, B sono invertibili.
   B) A è trasformabile in una matrice nulla mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   C) $\det B = \sum_{i=1}^{n} b_i^h B_i^h$ per ogni indice h compreso fra 1 ed n (B_i^h denota il complemento algebrico dell'elemento B_i^h in B).
   D) se B contiene due colonne uguali il suo determinante è nullo.

7) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
   B) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
   C) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) $\mu \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V c'è un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v}$.

8) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T è non suriettivo se e solo se $\rho(A) = 0$.
   B) T è non iniettivo se e solo se $\dim Ker\ T \neq 0$.
   C) se $T \circ T = T$ allora T è l'identità.
   D) se H è un sistema di generatori per V allora $T(H)$ è un sistema di generatori per $T(V)$.

9) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   B) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   C) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   D) ogni sottoinsieme non ortogonale di V è linearmente dipendente.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$.
   B) un sottoinsieme di V è una base di V se e solo se è linearmente indipendente.
   C) se B è una base di U esiste un sottoinsieme Y di V tale che $B \cup Y$ è una base di V.
   D) se $\dim V = k$ allora V ammette esattamente k basi distinte.

2) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x + 2y = 5$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano non ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 4)$ e la retta di equazione $-2x + 2y + 2 = 0$ è $2\sqrt{2}$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $5x - y = -3$ e $x + 5y = 3$ sono fra loro ortogonali.
   C) la conica di equazione $y = -37x^2$ è una parabola.
   D) siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $2\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

4) Sia S un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata ad S rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è invertibile.
   B) le righe di A sono linearmente indipendenti.
   C) se H è un sistema di generatori per V allora anche $S^{-1}(H)$ è un sistema di generatori per V.
   D) $Ker\ S = Im\ S$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A) - n$.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
   C) se A non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette più di una soluzione.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il polinomio caratteristico di T ha grado 1.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è non superiore ad n.
   C) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se, detto $p(t)$ il polinomio caratteristico di T, si ha che $p(\lambda) \neq 0$.
   D) se $\det A = 0$ allora T ammette solamente l'autovalore nullo.

7) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   B) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   C) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   D) ogni sottoinsieme non ortogonale di V è linearmente dipendente.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle trasformazioni lineari da uno spazio vettoriale reale V ad uno spazio vettoriale reale W è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di trasformazioni lineari.
   B) l'insieme dei numeri reali positivi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_7$ delle classi di resto modulo 7 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 7.

9) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è trasformabile in una matrice nulla mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   B) $\det B = \sum_{i=1}^{n} b_i^h B_i^h$ per ogni indice h compreso fra 1 ed n (B_i^h denota il complemento algebrico dell'elemento B_i^h in B).
   C) se B contiene due colonne uguali il suo determinante è nullo.
   D) se $A \cdot B$ è uguale ad una matrice invertibile allora le due matrici A, B sono invertibili.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4s + 1 \\ z = -t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

2) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim V - \dim U$.
   B) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \dots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n (u^i + v^i)$.
   C) se $n \geq 2$ allora V ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.
   D) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.

3) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $2A + B = B + 2A$.
   B) se A si ottiene da B scambiando fra loro di posto due colonne allora $\det A = \det B$.
   C) se A è ortogonale si ha che $|\det A| = 1$.
   D) se B è triangolare il suo determinante è nullo.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 2.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

5) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se U e W hanno in comune il solo vettore nullo allora $\dim U + \dim W = \dim(U+W)$.
   B) esiste almeno una base di U che è anche una base di W.
   C) se $\dim V = n$ allora per ogni numero naturale $m \leq n$ esiste una base di V con esattamente m elementi.
   D) se B è una base di V allora B è un sistema di generatori per V linearmente indipendente.

6) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mu \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V c'è un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v}$.
   B) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
   C) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
   D) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se C non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.

8) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se H è un sistema di generatori per V allora $T(H)$ è un sistema di generatori per $T(V)$.
   B) T è non suriettivo se e solo se $\rho(A) = 0$.
   C) T è non iniettivo se e solo se $\dim Ker\ T \neq 0$.
   D) se $T \circ T = T$ allora T è l'identità.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $50y^2 + 100x^2 = 1$ è una ellisse.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $x + y - 2 = 0$ è $\sqrt{2}$.
   C) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
   D) le rette di equazioni cartesiane $3x = 2$ e $3x + 4y = 2$ sono fra loro parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia S un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata ad S rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è invertibile.
   B) se H è un sistema di generatori per V allora anche $S^{-1}(H)$ è un sistema di generatori per V.
   C) $Ker\ S = Im\ S$.
   D) le righe di A sono linearmente indipendenti.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il polinomio caratteristico di T ha grado 1.
   B) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se, detto $p(t)$ il polinomio caratteristico di T, si ha che $p(\lambda) \neq 0$.
   C) se $\det A = 0$ allora T ammette solamente l'autovalore nullo.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è non superiore ad n.

3) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   B) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim V - \dim U$.
   C) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \dots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (u^i + v^i)$.
   D) se $n \geq 2$ allora V ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A) - n$.
   B) se A non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette più di una soluzione.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4s + 1 \\ z = -t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

B) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.

C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle x.

D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?

A) le rette di equazioni cartesiane $3x = 2$ e $3x + 4y = 2$ sono fra loro parallele.

B) la conica di equazione $50y^2 + 100x^2 = 1$ è una ellisse.

C) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $x + y - 2 = 0$ è $\sqrt{2}$.

D) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) l'insieme dei numeri reali positivi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

B) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

C) l'insieme delle trasformazioni lineari da uno spazio vettoriale reale V ad uno spazio vettoriale reale W è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di trasformazioni lineari.

D) l'insieme $\mathbf{Z}_7$ delle classi di resto modulo 7 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 7.

8) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\det B = \sum_{i=1}^{n} b_i^h B_i^h$ per ogni indice h compreso fra 1 ed n (B_i^h denota il complemento algebrico dell'elemento B_i^h in B).

B) se B contiene due colonne uguali il suo determinante è nullo.

C) A è trasformabile in una matrice nulla mediante una successione finita di trasformazioni elementari.

D) se $A \cdot B$ è uguale ad una matrice invertibile allora le due matrici A, B sono invertibili.

9) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora

A) un sottoinsieme di V è una base di V se e solo se è linearmente indipendente.

B) se B è una base di U esiste un sottoinsieme Y di V tale che $B \cup Y$ è una base di V.

C) $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$.

D) se $\dim V = k$ allora V ammette esattamente k basi distinte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A è ortogonale si ha che $|\det A| = 1$.
   B) $2A + B = B + 2A$.
   C) se A si ottiene da B scambiando fra loro di posto due colonne allora $\det A = \det B$.
   D) se B è triangolare il suo determinante è nullo.

2) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mu \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V c'è un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v}$.
   B) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
   C) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

3) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   B) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   C) ogni sottoinsieme non ortogonale di V è linearmente dipendente.
   D) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

4) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se $\dim V = n$ allora per ogni numero naturale $m \leq n$ esiste una base di V con esattamente m elementi.
   B) se U e W hanno in comune il solo vettore nullo allora $\dim U + \dim W = \dim(U + W)$.
   C) esiste almeno una base di U che è anche una base di W.
   D) se B è una base di V allora B è un sistema di generatori per V linearmente indipendente.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 2.
   D) l'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

6) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x + 2y = 5$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano non ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se C non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione allora $\rho(A) < \rho(C)$.

8) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se H è un sistema di generatori per V allora $T(H)$ è un sistema di generatori per $T(V)$.
   B) T è non suriettivo se e solo se $\rho(A) = 0$.
   C) se $T \circ T = T$ allora T è l'identità.
   D) T è non iniettivo se e solo se $\dim Ker\ T \neq 0$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 4)$ e la retta di equazione $-2x + 2y + 2 = 0$ è $2\sqrt{2}$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $5x - y = -3$ e $x + 5y = 3$ sono fra loro ortogonali.
   C) siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $2\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.
   D) la conica di equazione $y = -37x^2$ è una parabola.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) esiste almeno una base di U che è anche una base di W.
   B) se B è una base di V allora B è un sistema di generatori per V linearmente indipendente.
   C) se $\dim V = n$ allora per ogni numero naturale $m \leq n$ esiste una base di V con esattamente m elementi.
   D) se U e W hanno in comune il solo vettore nullo allora $\dim U + \dim W = \dim(U + W)$.

2) Sia S un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata ad S rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) le righe di A sono linearmente indipendenti.
   B) A è invertibile.
   C) $Ker\ S = Im\ S$.
   D) se H è un sistema di generatori per V allora anche $S^{-1}(H)$ è un sistema di generatori per V.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
   B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A) - n$.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   D) se A non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette più di una soluzione.

4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è non superiore ad n.
   B) il polinomio caratteristico di T ha grado 1.
   C) se $\det A = 0$ allora T ammette solamente l'autovalore nullo.
   D) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se, detto $p(t)$ il polinomio caratteristico di T, si ha che $p(\lambda) \neq 0$.

5) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A si ottiene da B scambiando fra loro di posto due colonne allora $\det A = \det B$.
   B) se B è triangolare il suo determinante è nullo.
   C) se A è ortogonale si ha che $|\det A| = 1$.
   D) $2A + B = B + 2A$.

6) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x + 2y = 5$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano non ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $y = -37x^2$ è una parabola.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 4)$ e la retta di equazione $-2x + 2y + 2 = 0$ è $2\sqrt{2}$.
   C) le rette di equazioni cartesiane $5x - y = -3$ e $x + 5y = 3$ sono fra loro ortogonali.
   D) siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $2\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

8) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   B) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   C) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   D) ogni sottoinsieme non ortogonale di V è linearmente dipendente.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 2.
   B) l'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4s + 1 \\ z = -t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   - A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   - B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle x.
   - C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   - D) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.

2) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   - A) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   - B) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \ldots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \ldots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n (u^i + v^i)$.
   - C) se $n \geq 2$ allora V ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.
   - D) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim V - \dim U$.

3) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   - A) se B contiene due colonne uguali il suo determinante è nullo.
   - B) $\det B = \sum_{i=1}^n b_i^h B_i^h$ per ogni indice h compreso fra 1 ed n (B_i^h denota il complemento algebrico dell'elemento B_i^h in B).
   - C) A è trasformabile in una matrice nulla mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   - D) se $A \cdot B$ è uguale ad una matrice invertibile allora le due matrici A, B sono invertibili.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   - A) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   - B) l'insieme dei numeri reali positivi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   - C) l'insieme delle trasformazioni lineari da uno spazio vettoriale reale V ad uno spazio vettoriale reale W è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di trasformazioni lineari.
   - D) l'insieme $\mathbf{Z}_7$ delle classi di resto modulo 7 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 7.

5) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $T \circ T = T$ allora T è l'identità.
   B) T è non iniettivo se e solo se $\dim Ker\ T \neq 0$.
   C) se H è un sistema di generatori per V allora $T(H)$ è un sistema di generatori per $T(V)$.
   D) T è non suriettivo se e solo se $\rho(A) = 0$.

6) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se B è una base di U esiste un sottoinsieme Y di V tale che $B \cup Y$ è una base di V.
   B) un sottoinsieme di V è una base di V se e solo se è linearmente indipendente.
   C) $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$.
   D) se $\dim V = k$ allora V ammette esattamente k basi distinte.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $3x = 2$ e $3x + 4y = 2$ sono fra loro parallele.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $x + y - 2 = 0$ è $\sqrt{2}$.
   C) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
   D) la conica di equazione $50y^2 + 100x^2 = 1$ è una ellisse.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   C) se C non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

9) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
   C) $\mu \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V c'è un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v}$.
   D) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia S un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata ad S rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $Ker\ S = Im\ S$.
   B) le righe di A sono linearmente indipendenti.
   C) A è invertibile.
   D) se H è un sistema di generatori per V allora anche $S^{-1}(H)$ è un sistema di generatori per V.

2) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim V - \dim U$.
   B) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   C) se $n \geq 2$ allora V ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.
   D) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \dots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (u^i + v^i)$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
   C) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A) - n$.
   D) se A non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette più di una soluzione.

4) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4s + 1 \\ z = -t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle x.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $50y^2 + 100x^2 = 1$ è una ellisse.
   B) le rette di equazioni cartesiane $3x = 2$ e $3x + 4y = 2$ sono fra loro parallele.
   C) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $x + y - 2 = 0$ è $\sqrt{2}$.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\det A = 0$ allora T ammette solamente l'autovalore nullo.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è non superiore ad n.
   C) il polinomio caratteristico di T ha grado 1.
   D) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se, detto $p(t)$ il polinomio caratteristico di T, si ha che $p(\lambda) \neq 0$.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 2.
   C) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

8) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se B è triangolare il suo determinante è nullo.
   B) se A si ottiene da B scambiando fra loro di posto due colonne allora $\det A = \det B$.
   C) $2A + B = B + 2A$.
   D) se A è ortogonale si ha che $|\det A| = 1$.

9) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se B è una base di V allora B è un sistema di generatori per V linearmente indipendente.
   B) esiste almeno una base di U che è anche una base di W.
   C) se U e W hanno in comune il solo vettore nullo allora $\dim U + \dim W = \dim(U + W)$.
   D) se $\dim V = n$ allora per ogni numero naturale $m \leq n$ esiste una base di V con esattamente m elementi.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei numeri reali positivi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle trasformazioni lineari da uno spazio vettoriale reale V ad uno spazio vettoriale reale W è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di trasformazioni lineari.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_7$ delle classi di resto modulo 7 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 7.
   D) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

2) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) $\mu \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V c'è un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v}$.
   C) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
   D) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

3) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) un sottoinsieme di V è una base di V se e solo se è linearmente indipendente.
   B) $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$.
   C) se $\dim V = k$ allora V ammette esattamente k basi distinte.
   D) se B è una base di U esiste un sottoinsieme Y di V tale che $B \cup Y$ è una base di V.

4) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det B = \sum_{i=1}^{n} b_i^h B_i^h$ per ogni indice h compreso fra 1 ed n (B_i^h denota il complemento algebrico dell'elemento B_i^h in B).
   B) A è trasformabile in una matrice nulla mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   C) se $A \cdot B$ è uguale ad una matrice invertibile allora le due matrici A, B sono invertibili.
   D) se B contiene due colonne uguali il suo determinante è nullo.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.
   B) se C non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $T \circ T = T$ allora T è l'identità.
   B) se H è un sistema di generatori per V allora $T(H)$ è un sistema di generatori per $T(V)$.
   C) T è non iniettivo se e solo se $\dim Ker\ T \neq 0$.
   D) T è non suriettivo se e solo se $\rho(A) = 0$.

7) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) ogni sottoinsieme non ortogonale di V è linearmente dipendente.
   B) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   C) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   D) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $2\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.
   B) la conica di equazione $y = -37x^2$ è una parabola.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 4)$ e la retta di equazione $-2x + 2y + 2 = 0$ è $2\sqrt{2}$.
   D) le rette di equazioni cartesiane $5x - y = -3$ e $x + 5y = 3$ sono fra loro ortogonali.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x + 2y = 5$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano non ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x + 2y = 5$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano non ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 4)$ e la retta di equazione $-2x + 2y + 2 = 0$ è $2\sqrt{2}$.
   B) la conica di equazione $y = -37x^2$ è una parabola.
   C) le rette di equazioni cartesiane $5x - y = -3$ e $x + 5y = 3$ sono fra loro ortogonali.
   D) siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $2\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

3) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$.
   B) un sottoinsieme di V è una base di V se e solo se è linearmente indipendente.
   C) se B è una base di U esiste un sottoinsieme Y di V tale che $B \cup Y$ è una base di V.
   D) se $\dim V = k$ allora V ammette esattamente k basi distinte.

4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se, detto $p(t)$ il polinomio caratteristico di T, si ha che $p(\lambda) \neq 0$.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è non superiore ad n.
   C) se $\det A = 0$ allora T ammette solamente l'autovalore nullo.
   D) il polinomio caratteristico di T ha grado 1.

5) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   B) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   C) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   D) ogni sottoinsieme non ortogonale di V è linearmente dipendente.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle trasformazioni lineari da uno spazio vettoriale reale V ad uno spazio vettoriale reale W è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di trasformazioni lineari.
   B) l'insieme dei numeri reali positivi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_7$ delle classi di resto modulo 7 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 7.

7) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è trasformabile in una matrice nulla mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   B) $\det B = \sum_{i=1}^{n} b_i^h B_i^h$ per ogni indice h compreso fra 1 ed n (B_i^h denota il complemento algebrico dell'elemento B_i^h in B).
   C) se B contiene due colonne uguali il suo determinante è nullo.
   D) se $A \cdot B$ è uguale ad una matrice invertibile allora le due matrici A, B sono invertibili.

8) Sia S un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata ad S rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se H è un sistema di generatori per V allora anche $S^{-1}(H)$ è un sistema di generatori per V.
   B) le righe di A sono linearmente indipendenti.
   C) $Ker\ S = Im\ S$.
   D) A è invertibile.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette più di una soluzione.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A) - n$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T è non iniettivo se e solo se $\dim Ker\ T \neq 0$.
   B) T è non suriettivo se e solo se $\rho(A) = 0$.
   C) se $T \circ T = T$ allora T è l'identità.
   D) se H è un sistema di generatori per V allora $T(H)$ è un sistema di generatori per $T(V)$.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 2.
   B) l'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

3) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
   B) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
   C) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) $\mu \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V c'è un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v}$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $x + y - 2 = 0$ è $\sqrt{2}$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $3x = 2$ e $3x + 4y = 2$ sono fra loro parallele.
   C) la conica di equazione $50y^2 + 100x^2 = 1$ è una ellisse.
   D) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

5) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) esiste almeno una base di U che è anche una base di W.
   B) se B è una base di V allora B è un sistema di generatori per V linearmente indipendente.
   C) se U e W hanno in comune il solo vettore nullo allora $\dim U + \dim W = \dim(U + W)$.
   D) se $\dim V = n$ allora per ogni numero naturale $m \leq n$ esiste una base di V con esattamente m elementi.

6) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A si ottiene da B scambiando fra loro di posto due colonne allora $\det A = \det B$.
   B) se B è triangolare il suo determinante è nullo.
   C) $2A + B = B + 2A$.
   D) se A è ortogonale si ha che $|\det A| = 1$.

7) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \ldots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \ldots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (u^i + v^i)$.
   B) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   C) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim V - \dim U$.
   D) se $n \geq 2$ allora V ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.
   D) se C non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4s + 1 \\ z = -t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia S un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata ad S rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $Ker\ S = Im\ S$.
   B) se H è un sistema di generatori per V allora anche $S^{-1}(H)$ è un sistema di generatori per V.
   C) le righe di A sono linearmente indipendenti.
   D) A è invertibile.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   B) se A non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette più di una soluzione.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A) - n$.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4s + 1 \\ z = -t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle x.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $3x = 2$ e $3x + 4y = 2$ sono fra loro parallele.
   B) la conica di equazione $50y^2 + 100x^2 = 1$ è una ellisse.
   C) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $x + y - 2 = 0$ è $\sqrt{2}$.

5) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\det A = 0$ allora T ammette solamente l'autovalore nullo.
   B) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se, detto $p(t)$ il polinomio caratteristico di T, si ha che $p(\lambda) \neq 0$.
   C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è non superiore ad n.
   D) il polinomio caratteristico di T ha grado 1.

6) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   B) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim V - \dim U$.
   C) se $n \geq 2$ allora V ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.
   D) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \dots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n (u^i + v^i)$.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei numeri reali positivi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_7$ delle classi di resto modulo 7 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 7.
   D) l'insieme delle trasformazioni lineari da uno spazio vettoriale reale V ad uno spazio vettoriale reale W è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di trasformazioni lineari.

8) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det B = \sum_{i=1}^n b_i^h B_i^h$ per ogni indice h compreso fra 1 ed n (B_i^h denota il complemento algebrico dell'elemento B_i^h in B).
   B) se B contiene due colonne uguali il suo determinante è nullo.
   C) se $A \cdot B$ è uguale ad una matrice invertibile allora le due matrici A, B sono invertibili.
   D) A è trasformabile in una matrice nulla mediante una successione finita di trasformazioni elementari.

9) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) un sottoinsieme di V è una base di V se e solo se è linearmente indipendente.
   B) se B è una base di U esiste un sottoinsieme Y di V tale che $B \cup Y$ è una base di V.
   C) se $\dim V = k$ allora V ammette esattamente k basi distinte.
   D) $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $2A + B = B + 2A$.
   B) se B è triangolare il suo determinante è nullo.
   C) se A è ortogonale si ha che $|\det A| = 1$.
   D) se A si ottiene da B scambiando fra loro di posto due colonne allora $\det A = \det B$.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   B) l'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 2.

3) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se U e W hanno in comune il solo vettore nullo allora $\dim U + \dim W = \dim(U + W)$.
   B) se B è una base di V allora B è un sistema di generatori per V linearmente indipendente.
   C) se $\dim V = n$ allora per ogni numero naturale $m \leq n$ esiste una base di V con esattamente m elementi.
   D) esiste almeno una base di U che è anche una base di W.

4) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   B) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   C) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   D) ogni sottoinsieme non ortogonale di V è linearmente dipendente.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   C) se C non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $T \circ T = T$ allora T è l'identità.
   B) T è non iniettivo se e solo se $\dim Ker\ T \neq 0$.
   C) se H è un sistema di generatori per V allora $T(H)$ è un sistema di generatori per $T(V)$.
   D) T è non suriettivo se e solo se $\rho(A) = 0$.

7) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x + 2y = 5$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano non ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 4)$ e la retta di equazione $-2x + 2y + 2 = 0$ è $2\sqrt{2}$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $5x - y = -3$ e $x + 5y = 3$ sono fra loro ortogonali.
   C) la conica di equazione $y = -37x^2$ è una parabola.
   D) siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $2\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

9) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
   C) $\mu \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V c'è un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v}$.
   D) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   B) se A non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette più di una soluzione.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A) - n$.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\det A = 0$ allora T ammette solamente l'autovalore nullo.
   B) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se, detto $p(t)$ il polinomio caratteristico di T, si ha che $p(\lambda) \neq 0$.
   C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è non superiore ad n.
   D) il polinomio caratteristico di T ha grado 1.

3) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   B) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   C) ogni sottoinsieme non ortogonale di V è linearmente dipendente.
   D) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 2.
   D) l'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x + 2y = 5$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano non ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 4)$ e la retta di equazione $-2x + 2y + 2 = 0$ è $2\sqrt{2}$.
   B) la conica di equazione $y = -37x^2$ è una parabola.
   C) siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $2\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.
   D) le rette di equazioni cartesiane $5x - y = -3$ e $x + 5y = 3$ sono fra loro ortogonali.

7) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A è ortogonale si ha che $|\det A| = 1$.
   B) $2A + B = B + 2A$.
   C) se A si ottiene da B scambiando fra loro di posto due colonne allora $\det A = \det B$.
   D) se B è triangolare il suo determinante è nullo.

8) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se $\dim V = n$ allora per ogni numero naturale $m \leq n$ esiste una base di V con esattamente m elementi.
   B) se U e W hanno in comune il solo vettore nullo allora $\dim U + \dim W = \dim(U + W)$.
   C) esiste almeno una base di U che è anche una base di W.
   D) se B è una base di V allora B è un sistema di generatori per V linearmente indipendente.

9) Sia S un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata ad S rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $Ker\ S = Im\ S$.
   B) se H è un sistema di generatori per V allora anche $S^{-1}(H)$ è un sistema di generatori per V.
   C) le righe di A sono linearmente indipendenti.
   D) A è invertibile.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è trasformabile in una matrice nulla mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   B) se $A \cdot B$ è uguale ad una matrice invertibile allora le due matrici A, B sono invertibili.
   C) se B contiene due colonne uguali il suo determinante è nullo.
   D) $\det B = \sum_{i=1}^{n} b_i^h B_i^h$ per ogni indice h compreso fra 1 ed n (B_i^h denota il complemento algebrico dell'elemento B_i^h in B).

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle trasformazioni lineari da uno spazio vettoriale reale V ad uno spazio vettoriale reale W è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di trasformazioni lineari.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_7$ delle classi di resto modulo 7 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 7.
   C) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme dei numeri reali positivi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

3) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T è non iniettivo se e solo se $\dim Ker\ T \neq 0$.
   B) se $T \circ T = T$ allora T è l'identità.
   C) T è non suriettivo se e solo se $\rho(A) = 0$.
   D) se H è un sistema di generatori per V allora $T(H)$ è un sistema di generatori per $T(V)$.

4) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$.
   B) se $\dim V = k$ allora V ammette esattamente k basi distinte.
   C) se B è una base di U esiste un sottoinsieme Y di V tale che $B \cup Y$ è una base di V.
   D) un sottoinsieme di V è una base di V se e solo se è linearmente indipendente.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4s + 1 \\ z = -t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle x.
C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.

6) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora

A) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim V - \dim U$.
B) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \dots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^n (u^i + v^i)$.
C) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle < 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
D) se $n \geq 2$ allora V ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.

7) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
B) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
C) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
D) $\mu \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V c'è un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v}$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?

A) la conica di equazione $50y^2 + 100x^2 = 1$ è una ellisse.
B) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $x + y - 2 = 0$ è $\sqrt{2}$.
C) le rette di equazioni cartesiane $3x = 2$ e $3x + 4y = 2$ sono fra loro parallele.
D) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) se $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione allora $\rho(A) < \rho(C)$.
B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.
C) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
D) se C non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \dots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n (u^i + v^i)$.
   B) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   C) se $n \geq 2$ allora V ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.
   D) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim V - \dim U$.

2) Sia S un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata ad S rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) le righe di A sono linearmente indipendenti.
   B) $Ker\ S = Im\ S$.
   C) se H è un sistema di generatori per V allora anche $S^{-1}(H)$ è un sistema di generatori per V.
   D) A è invertibile.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   C) se A non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette più di una soluzione.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A) - n$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $x + y - 2 = 0$ è $\sqrt{2}$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $3x = 2$ e $3x + 4y = 2$ sono fra loro parallele.
   C) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
   D) la conica di equazione $50y^2 + 100x^2 = 1$ è una ellisse.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) l'insieme $\mathbf{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 2.

B) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

C) l'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

D) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.

6) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) se A si ottiene da B scambiando fra loro di posto due colonne allora $\det A = \det B$.

B) se A è ortogonale si ha che $|\det A| = 1$.

C) se B è triangolare il suo determinante è nullo.

D) $2A + B = B + 2A$.

7) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora

A) esiste almeno una base di U che è anche una base di W.

B) se $\dim V = n$ allora per ogni numero naturale $m \leq n$ esiste una base di V con esattamente m elementi.

C) se B è una base di V allora B è un sistema di generatori per V linearmente indipendente.

D) se U e W hanno in comune il solo vettore nullo allora $\dim U + \dim W = \dim(U + W)$.

8) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4s + 1 \\ z = -t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle x.

B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.

D) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.

9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è non superiore ad n.

B) se $\det A = 0$ allora T ammette solamente l'autovalore nullo.

C) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se, detto $p(t)$ il polinomio caratteristico di T, si ha che $p(\lambda) \neq 0$.

D) il polinomio caratteristico di T ha grado 1.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   B) ogni sottoinsieme non ortogonale di V è linearmente dipendente.
   C) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   D) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

2) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se B contiene due colonne uguali il suo determinante è nullo.
   B) A è trasformabile in una matrice nulla mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   C) se $A \cdot B$ è uguale ad una matrice invertibile allora le due matrici A, B sono invertibili.
   D) $\det B = \sum_{i=1}^{n} b_i^h B_i^h$ per ogni indice h compreso fra 1 ed n (B_i^h denota il complemento algebrico dell'elemento B_i^h in B).

3) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se B è una base di U esiste un sottoinsieme Y di V tale che $B \cup Y$ è una base di V.
   B) $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$.
   C) se $\dim V = k$ allora V ammette esattamente k basi distinte.
   D) un sottoinsieme di V è una base di V se e solo se è linearmente indipendente.

4) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x + 2y = 5$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano non ortogonale all'asse delle y.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   B) se C non ha rango massimo allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T è non iniettivo se e solo se $\dim Ker\ T \neq 0$.
   B) se H è un sistema di generatori per V allora $T(H)$ è un sistema di generatori per $T(V)$.
   C) T è non suriettivo se e solo se $\rho(A) = 0$.
   D) se $T \circ T = T$ allora T è l'identità.

7) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
   B) $\mu \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V c'è un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v}$.
   C) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
   D) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $5x - y = -3$ e $x + 5y = 3$ sono fra loro ortogonali.
   B) siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $2\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.
   C) la conica di equazione $y = -37x^2$ è una parabola.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 4)$ e la retta di equazione $-2x + 2y + 2 = 0$ è $2\sqrt{2}$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle trasformazioni lineari da uno spazio vettoriale reale V ad uno spazio vettoriale reale W è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di trasformazioni lineari.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_7$ delle classi di resto modulo 7 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 7.
   D) l'insieme dei numeri reali positivi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.