Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme dei polinomi reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   D) l'insieme dei numeri interi multipli di 10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   B) la matrice $A^2 + B^2$ è regolare.
   C) A^2 ha determinante positivo.
   D) A, B e C sono invertibili.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi reali di grado non superiore a 9 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con tutti gli elementi uguali a numeri interi è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme $\{(\pi, 0, 0, 0), (\pi, \pi, 0, 0), (\pi, \pi, \pi, 0), (\pi, \pi, \pi, \pi)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle successioni reali il cui primo termine sia uguale a 0, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (2xy, 3xy)$ è una trasformazione lineare.
   B) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 in se stessa ha dimensione 0.
   C) una trasformazione lineare T da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è invertibile se e solo se lo è T^2.
   D) la composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m > n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   C) può accadere che A abbia rango 3 e C abbia rango 4.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ ammette come soluzione l'n-upla nulla allora $\rho(A) = n$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) ogni autovalore reale di T è inferiore al numero n.
   B) T è sempre diagonalizzabile.
   C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T non può superare n.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle < 0$.
   B) se $v \in V$ allora $\|v\| = \langle v, v \rangle$.
   C) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione strettamente inferiore a quella del suo complemento ortogonale.
   D) se $u, v \in V$ allora $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non ortogonali.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 2)$, $(4, 5)$ è $(2, 4)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -1)$ e la retta di equazione $3x - y = 1$ è 2.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, -1)$, $(1, -1, -1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se A non è simmetrica allora V non ammette una base spettrale relativa a T.
   B) se T ammette n autovalori strettamente negativi allora T è invertibile.
   C) il polinomio caratteristico di A è uguale al polinomio caratteristico di B.
   D) A e B hanno la stessa traccia.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1,1,1)$,$(0,1,1)$,$(0,0,1)$,$(0,0,0)$ è $1/6$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 2x = 0$ è una parabola.
   C) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3,2,1)$ rispetto al punto $(0,0,0)$ è il punto $(1,2,3)$.
   D) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è ortogonale sia ad u che a v.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = s, z = 0$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) un vettore ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base.
   B) la $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = -3A$ è una trasformazione lineare.
   C) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali che si annullano nel punto 0 ha dimensione infinita.
   D) il nucleo e l'immagine di un endomorfismo hanno sempre la stessa dimensione.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   B) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali ad 1 allora A è regolare.
   C) se $A^2 = B^2$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se $A \cdot C = B \cdot C$ e C è invertibile allora $A = B$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni gruppo contiene infiniti elementi.
   B) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $\mathbf{K}$ e V sono campi rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$.
   C) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se A e C hanno lo stesso rango.
   B) se $m = n$ e le righe di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo non può ammettere alcuna soluzione.
   D) il rango di C è sempre uguale al rango di A.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : z = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 con un solo elemento non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   D) ogni insieme di n vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ e $\langle u, v \rangle = 0$ allora v è il vettore nullo.
   B) se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\|v_1 + v_2 + \ldots + v_n\| = 1$.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\| + \|v\|$.
   D) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle -u, -u \rangle$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) A, B e C sono invertibili.
   B) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   C) la matrice $A^2 + B^2$ è regolare.
   D) A^2 ha determinante positivo.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ ammette come soluzione l'n-upla nulla allora $\rho(A) = n$.
   B) può accadere che A abbia rango 3 e C abbia rango 4.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   D) se $m > n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T non può superare n.
   C) T è sempre diagonalizzabile.
   D) ogni autovalore reale di T è inferiore al numero n.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle -u, -u \rangle$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\| + \|v\|$.
   C) se $u, v \in V$ e $\langle u, v \rangle = 0$ allora v è il vettore nullo.
   D) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\|v_1 + v_2 + \ldots + v_n\| = 1$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali il cui primo termine sia uguale a 0, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme dei polinomi reali di grado non superiore a 9 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con tutti gli elementi uguali a numeri interi è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme $\{(\pi, 0, 0, 0), (\pi, \pi, 0, 0), (\pi, \pi, \pi, 0), (\pi, \pi, \pi, \pi)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.
   B) una trasformazione lineare T da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è invertibile se e solo se lo è T^2.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 in se stessa ha dimensione 0.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (2xy, 3xy)$ è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = s, z = 0$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è ortogonale sia ad u che a v.
   B) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(0, 0, 0)$ è il punto $(1, 2, 3)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 0, 0)$ è $1/6$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 2x = 0$ è una parabola.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi multipli di 10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei polinomi reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2,-1)$ e la retta di equazione $3x-y=1$ è 2.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2-2xy+y^2-1=0$ è una iperbole.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1,0,0)$, $(2,0,-1)$, $(1,-1,-1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1,2)$, $(4,5)$ è $(2,4)$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) il rango di C è sempre uguale al rango di A.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo non può ammettere alcuna soluzione.
   C) se $m=n$ e le righe di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se A e C hanno lo stesso rango.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n\times n$ a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $\mathbf{K}$ e V sono campi rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$.
   C) ogni gruppo contiene infiniti elementi.
   D) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno la stessa traccia.
   B) il polinomio caratteristico di A è uguale al polinomio caratteristico di B.
   C) se T ammette n autovalori strettamente negativi allora T è invertibile.
   D) se A non è simmetrica allora V non ammette una base spettrale relativa a T.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x+y=0$ e $y-z=3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\| = \langle v, v \rangle$.
   B) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione strettamente inferiore a quella del suo complemento ortogonale.
   C) se $u, v \in V$ allora $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   D) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle < 0$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni insieme di n vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 con un solo elemento non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot C = B \cdot C$ e C è invertibile allora $A = B$.
   B) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali ad 1 allora A è regolare.
   C) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   D) se $A^2 = B^2$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo e l'immagine di un endomorfismo hanno sempre la stessa dimensione.
   B) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali che si annullano nel punto 0 ha dimensione infinita.
   C) la $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = -3A$ è una trasformazione lineare.
   D) un vettore ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot C = B \cdot C$ e C è invertibile allora $A = B$.
   B) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   C) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali ad 1 allora A è regolare.
   D) se $A^2 = B^2$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni insieme di n vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 con un solo elemento non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 in se stessa ha dimensione 0.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (2xy, 3xy)$ è una trasformazione lineare.
   C) la composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.
   D) una trasformazione lineare T da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è invertibile se e solo se lo è T^2.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   B) se $m > n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto.
   C) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ ammette come soluzione l'n-upla nulla allora $\rho(A) = n$.
   D) può accadere che A abbia rango 3 e C abbia rango 4.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T è sempre diagonalizzabile.
   B) ogni autovalore reale di T è inferiore al numero n.
   C) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T non può superare n.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\| = \langle v, v \rangle$.
   B) se $u, v \in V$ allora $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   C) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle < 0$.
   D) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione strettamente inferiore a quella del suo complemento ortogonale.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -1)$ e la retta di equazione $3x - y = 1$ è 2.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, -1)$, $(1, -1, -1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 2)$, $(4, 5)$ è $(2, 4)$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) ogni gruppo contiene infiniti elementi.
   C) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $\mathbf{K}$ e V sono campi rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$.
   D) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\| + \|v\|$.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle -u, -u \rangle$.
   C) se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\|v_1 + v_2 + \ldots + v_n\| = 1$.
   D) se $u, v \in V$ e $\langle u, v \rangle = 0$ allora v è il vettore nullo.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T ammette n autovalori strettamente negativi allora T è invertibile.
   B) se A non è simmetrica allora V non ammette una base spettrale relativa a T.
   C) il polinomio caratteristico di A è uguale al polinomio caratteristico di B.
   D) A e B hanno la stessa traccia.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) la matrice $A^2 + B^2$ è regolare.
   B) A^2 ha determinante positivo.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   D) A, B e C sono invertibili.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei polinomi reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme dei numeri interi multipli di 10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = s, z = 0$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3,2,1)$ rispetto al punto $(0,0,0)$ è il punto $(1,2,3)$.
   B) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è ortogonale sia ad u che a v.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 2x = 0$ è una parabola.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1,1,1)$,$(0,1,1)$,$(0,0,1)$,$(0,0,0)$ è $1/6$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = -3A$ è una trasformazione lineare.
   B) un vettore ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base.
   C) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali che si annullano nel punto 0 ha dimensione infinita.
   D) il nucleo e l'immagine di un endomorfismo hanno sempre la stessa dimensione.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con tutti gli elementi uguali a numeri interi è un sottospazio vettoriale di $M_4(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme $\{(\pi, 0, 0, 0), (\pi, \pi, 0, 0), (\pi, \pi, \pi, 0), (\pi, \pi, \pi, \pi)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   C) l'insieme dei polinomi reali di grado non superiore a 9 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle successioni reali il cui primo termine sia uguale a 0, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m = n$ e le righe di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se A e C hanno lo stesso rango.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo non può ammettere alcuna soluzione.
   D) il rango di C è sempre uguale al rango di A.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali ad 1 allora A è regolare.
   B) se $A^2 = B^2$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $A \cdot C = B \cdot C$ e C è invertibile allora $A = B$.
   D) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : z = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 con un solo elemento non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   C) ogni insieme di n vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(I\!R)$ ad $M_2(I\!R)$ che manda ogni matrice reale 2×2 in se stessa ha dimensione 0.
   B) una trasformazione lineare T da $I\!R^n$ in $I\!R^n$ è invertibile se e solo se lo è T^2.
   C) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R^2$ definita da $F(x, y, z) = (2xy, 3xy)$ è una trasformazione lineare.
   D) la composizione di due endomorfismi di $I\!R^3$ è un endomorfismo di $I\!R^3$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   B) può accadere che A abbia rango 3 e C abbia rango 4.
   C) se $m > n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ ammette come soluzione l'n-upla nulla allora $\rho(A) = n$.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è ortogonale sia ad u che a v.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1,1,1)$,$(0,1,1)$,$(0,0,1)$,$(0,0,0)$ è $1/6$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 2x = 0$ è una parabola.
   D) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3,2,1)$ rispetto al punto $(0,0,0)$ è il punto $(1,2,3)$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $\mathbf{K}$ e V sono campi rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$.
   B) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) ogni gruppo contiene infiniti elementi.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T è sempre diagonalizzabile.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T non può superare n.
   C) ogni autovalore reale di T è inferiore al numero n.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle -u, -u \rangle$.
   B) se $u, v \in V$ e $\langle u, v \rangle = 0$ allora v è il vettore nullo.
   C) se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\|v_1 + v_2 + \ldots + v_n\| = 1$.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\| + \|v\|$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = s, z = 0$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se A e C hanno lo stesso rango.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo non può ammettere alcuna soluzione.
   C) il rango di C è sempre uguale al rango di A.
   D) se $m = n$ e le righe di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non ortogonali.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme dei numeri interi multipli di 10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei polinomi reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -1)$ e la retta di equazione $3x - y = 1$ è 2.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 2)$, $(4, 5)$ è $(2, 4)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, -1)$, $(1, -1, -1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi reali di grado non superiore a 9 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con tutti gli elementi uguali a numeri interi è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle successioni reali il cui primo termine sia uguale a 0, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   D) l'insieme $\{(\pi, 0, 0, 0), (\pi, \pi, 0, 0), (\pi, \pi, \pi, 0), (\pi, \pi, \pi, \pi)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   B) la matrice $A^2 + B^2$ è regolare.
   C) A, B e C sono invertibili.
   D) A^2 ha determinante positivo.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se A non è simmetrica allora V non ammette una base spettrale relativa a T.
   B) il polinomio caratteristico di A è uguale al polinomio caratteristico di B.
   C) A e B hanno la stessa traccia.
   D) se T ammette n autovalori strettamente negativi allora T è invertibile.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) un vettore ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base.
   B) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali che si annullano nel punto 0 ha dimensione infinita.
   C) il nucleo e l'immagine di un endomorfismo hanno sempre la stessa dimensione.
   D) la $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = -3A$ è una trasformazione lineare.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione strettamente inferiore a quella del suo complemento ortogonale.
   B) se $v \in V$ allora $\|v\| = \langle v, v \rangle$.
   C) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle < 0$.
   D) se $u, v \in V$ allora $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con tutti gli elementi uguali a numeri interi è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle successioni reali il cui primo termine sia uguale a 0, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme $\{(\pi, 0, 0, 0), (\pi, \pi, 0, 0), (\pi, \pi, \pi, 0), (\pi, \pi, \pi, \pi)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme dei polinomi reali di grado non superiore a 9 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non ortogonali.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -1)$ e la retta di equazione $3x - y = 1$ è 2.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 2)$, $(4, 5)$ è $(2, 4)$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, -1)$, $(1, -1, -1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.
   B) una trasformazione lineare T da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è invertibile se e solo se lo è T^2.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (2xy, 3xy)$ è una trasformazione lineare.
   D) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 in se stessa ha dimensione 0.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ ammette come soluzione l'n-upla nulla allora $\rho(A) = n$.
   B) può accadere che A abbia rango 3 e C abbia rango 4.
   C) se $m > n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $\rho(A) < \rho(C)$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T non può superare n.
   C) ogni autovalore reale di T è inferiore al numero n.
   D) T è sempre diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\| = \langle v, v \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle < 0$.
   C) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione strettamente inferiore a quella del suo complemento ortogonale.
   D) se $u, v \in V$ allora $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri interi multipli di 10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei polinomi reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

9) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) la matrice $A^2 + B^2$ è regolare.
   B) A, B e C sono invertibili.
   C) A^2 ha determinante positivo.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = s, z = 0$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\| + \|v\|$.
   B) se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\|v_1 + v_2 + \ldots + v_n\| = 1$.
   C) se $u, v \in V$ e $\langle u, v \rangle = 0$ allora v è il vettore nullo.
   D) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle -u, -u \rangle$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A^2 = B^2$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   B) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   C) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali ad 1 allora A è regolare.
   D) se $A \cdot C = B \cdot C$ e C è invertibile allora $A = B$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) ogni gruppo contiene infiniti elementi.
   C) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $\mathbf{K}$ e V sono campi rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 con un solo elemento non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) ogni insieme di n vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T ammette n autovalori strettamente negativi allora T è invertibile.
   B) se A non è simmetrica allora V non ammette una base spettrale relativa a T.
   C) il polinomio caratteristico di A è uguale al polinomio caratteristico di B.
   D) A e B hanno la stessa traccia.

7) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) se $m = n$ e le righe di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   B) **S** ammette soluzione se e solo se A e C hanno lo stesso rango.
   C) se **S** è un sistema lineare non omogeneo non può ammettere alcuna soluzione.
   D) il rango di C è sempre uguale al rango di A.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = -3A$ è una trasformazione lineare.
   B) un vettore ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base.
   C) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali che si annullano nel punto 0 ha dimensione infinita.
   D) il nucleo e l'immagine di un endomorfismo hanno sempre la stessa dimensione.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(0, 0, 0)$ è il punto $(1, 2, 3)$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 2x = 0$ è una parabola.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 0, 0)$ è $1/6$.
   D) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è ortogonale sia ad u che a v.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (2xy, 3xy)$ è una trasformazione lineare.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 in se stessa ha dimensione 0.
   D) una trasformazione lineare T da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è invertibile se e solo se lo è T^2.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   B) ogni autovalore reale di T è inferiore al numero n.
   C) T è sempre diagonalizzabile.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T non può superare n.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle -u, -u \rangle$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\| + \|v\|$.
   C) se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\|v_1 + v_2 + \ldots + v_n\| = 1$.
   D) se $u, v \in V$ e $\langle u, v \rangle = 0$ allora v è il vettore nullo.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ ammette come soluzione l'n-upla nulla allora $\rho(A) = n$.
   B) se $m > n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   D) può accadere che A abbia rango 3 e C abbia rango 4.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = s, z = 0$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è ortogonale sia ad u che a v.
   B) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(0, 0, 0)$ è il punto $(1, 2, 3)$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 2x = 0$ è una parabola.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 0, 0)$ è $1/6$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi multipli di 10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei polinomi reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   C) l'insieme $I\!R$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) A, B e C sono invertibili.
   B) A^2 ha determinante positivo.
   C) la matrice $A^2 + B^2$ è regolare.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali il cui primo termine sia uguale a 0, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme $\{(\pi, 0, 0, 0), (\pi, \pi, 0, 0), (\pi, \pi, \pi, 0), (\pi, \pi, \pi, \pi)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con tutti gli elementi uguali a numeri interi è un sottospazio vettoriale di $M_4(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme dei polinomi reali di grado non superiore a 9 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali ad 1 allora A è regolare.
   B) se $A^2 = B^2$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   D) se $A \cdot C = B \cdot C$ e C è invertibile allora $A = B$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T ammette n autovalori strettamente negativi allora T è invertibile.
   B) se A non è simmetrica allora V non ammette una base spettrale relativa a T.
   C) A e B hanno la stessa traccia.
   D) il polinomio caratteristico di A è uguale al polinomio caratteristico di B.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\| = \langle v, v \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle < 0$.
   C) se $u, v \in V$ allora $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   D) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione strettamente inferiore a quella del suo complemento ortogonale.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 con un solo elemento non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) ogni insieme di n vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $\mathbf{K}$ e V sono campi rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$.
   B) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) ogni gruppo contiene infiniti elementi.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x+y=0$ e $y-z=3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.

7) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) se $m=n$ e le righe di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   B) **S** ammette soluzione se e solo se A e C hanno lo stesso rango.
   C) il rango di C è sempre uguale al rango di A.
   D) se **S** è un sistema lineare non omogeneo non può ammettere alcuna soluzione.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la $F: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = -3A$ è una trasformazione lineare.
   B) un vettore ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base.
   C) il nucleo e l'immagine di un endomorfismo hanno sempre la stessa dimensione.
   D) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali che si annullano nel punto 0 ha dimensione infinita.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2,-1)$ e la retta di equazione $3x-y=1$ è 2.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1,2)$, $(4,5)$ è $(2,4)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1,0,0)$, $(2,0,-1)$, $(1,-1,-1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2-2xy+y^2-1=0$ è una iperbole.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) ogni insieme di n vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 con un solo elemento non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) una trasformazione lineare T da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è invertibile se e solo se lo è T^2.
   B) la composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 in se stessa ha dimensione 0.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (2xy, 3xy)$ è una trasformazione lineare.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A abbia rango 3 e C abbia rango 4.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ ammette come soluzione l'n-upla nulla allora $\rho(A) = n$.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   D) se $m > n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T non può superare n.
   B) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   C) T è sempre diagonalizzabile.
   D) ogni autovalore reale di T è inferiore al numero n.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   B) se $A \cdot C = B \cdot C$ e C è invertibile allora $A = B$.
   C) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali ad 1 allora A è regolare.
   D) se $A^2 = B^2$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non ortogonali.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -1)$ e la retta di equazione $3x - y = 1$ è 2.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 2)$, $(4, 5)$ è $(2, 4)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, -1)$, $(1, -1, -1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione strettamente inferiore a quella del suo complemento ortogonale.
   B) se $v \in V$ allora $\|v\| = \langle v, v \rangle$.
   C) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle < 0$.
   D) se $u, v \in V$ allora $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni gruppo contiene infiniti elementi.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $\mathbf{K}$ e V sono campi rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$.
   D) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = s, z = 0$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

2) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u\rangle = \langle -u, -u\rangle$.
   B) se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\|v_1 + v_2 + \ldots + v_n\| = 1$.
   C) se $u, v \in V$ e $\langle u, v\rangle = 0$ allora v è il vettore nullo.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v\rangle = \|u\| + \|v\|$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) A^2 ha determinante positivo.
   B) A, B e C sono invertibili.
   C) la matrice $A^2 + B^2$ è regolare.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   B) l'insieme dei numeri interi multipli di 10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo e l'immagine di un endomorfismo hanno sempre la stessa dimensione.
   B) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali che si annullano nel punto 0 ha dimensione infinita.
   C) la $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = -3A$ è una trasformazione lineare.
   D) un vettore ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(\pi, 0, 0, 0), (\pi, \pi, 0, 0), (\pi, \pi, \pi, 0), (\pi, \pi, \pi, \pi)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle successioni reali il cui primo termine sia uguale a 0, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con tutti gli elementi uguali a numeri interi è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme dei polinomi reali di grado non superiore a 9 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è ortogonale sia ad u che a v.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 2x = 0$ è una parabola.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 0, 0)$ è $1/6$.
   D) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(0, 0, 0)$ è il punto $(1, 2, 3)$.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) il rango di C è sempre uguale al rango di A.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo non può ammettere alcuna soluzione.
   C) se $m = n$ e le righe di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se A e C hanno lo stesso rango.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno la stessa traccia.
   B) il polinomio caratteristico di A è uguale al polinomio caratteristico di B.
   C) se T ammette n autovalori strettamente negativi allora T è invertibile.
   D) se A non è simmetrica allora V non ammette una base spettrale relativa a T.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 in se stessa ha dimensione 0.
   B) una trasformazione lineare T da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è invertibile se e solo se lo è T^2.
   C) la composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (2xy, 3xy)$ è una trasformazione lineare.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\| + \|v\|$.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle -u, -u \rangle$.
   C) se $u, v \in V$ e $\langle u, v \rangle = 0$ allora v è il vettore nullo.
   D) se $(v_1, \dots , v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\|v_1 + v_2 + \dots + v_n\| = 1$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   B) può accadere che A abbia rango 3 e C abbia rango 4.
   C) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ ammette come soluzione l'n-upla nulla allora $\rho(A) = n$.
   D) se $m > n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = s, z = 0$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(0, 0, 0)$ è il punto $(1, 2, 3)$.
   B) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è ortogonale sia ad u che a v.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 0, 0)$ è $1/6$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 2x = 0$ è una parabola.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T è sempre diagonalizzabile.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T non può superare n.
   C) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   D) ogni autovalore reale di T è inferiore al numero n.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) ogni gruppo contiene infiniti elementi.
   C) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $\mathbf{K}$ e V sono campi rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot C = B \cdot C$ e C è invertibile allora $A = B$.
   B) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   C) se $A^2 = B^2$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali ad 1 allora A è regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni insieme di n vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 con un solo elemento non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi multipli di 10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme $I\!R$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme dei polinomi reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno la stessa traccia.
   B) se T ammette n autovalori strettamente negativi allora T è invertibile.
   C) il polinomio caratteristico di A è uguale al polinomio caratteristico di B.
   D) se A non è simmetrica allora V non ammette una base spettrale relativa a T.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali il cui primo termine sia uguale a 0, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con tutti gli elementi uguali a numeri interi è un sottospazio vettoriale di $M_4(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme dei polinomi reali di grado non superiore a 9 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(\pi, 0, 0, 0), (\pi, \pi, 0, 0), (\pi, \pi, \pi, 0), (\pi, \pi, \pi, \pi)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.

4) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) A, B e C sono invertibili.
   B) la matrice $A^2 + B^2$ è regolare.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   D) A^2 ha determinante positivo.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) il rango di C è sempre uguale al rango di A.
   B) se $m = n$ e le righe di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo non può ammettere alcuna soluzione.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se A e C hanno lo stesso rango.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo e l'immagine di un endomorfismo hanno sempre la stessa dimensione.
   B) la $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = -3A$ è una trasformazione lineare.
   C) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali che si annullano nel punto 0 ha dimensione infinita.
   D) un vettore ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.
   B) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione strettamente inferiore a quella del suo complemento ortogonale.
   C) se $v \in V$ allora $\|v\| = \langle v, v\rangle$.
   D) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v\rangle < 0$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, -1)$, $(1, -1, -1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -1)$ e la retta di equazione $3x - y = 1$ è 2.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 2)$, $(4, 5)$ è $(2, 4)$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non ortogonali.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -1)$ e la retta di equazione $3x - y = 1$ è 2.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 2)$, $(4, 5)$ è $(2, 4)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, -1)$, $(1, -1, -1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con tutti gli elementi uguali a numeri interi è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle successioni reali il cui primo termine sia uguale a 0, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme $\{(\pi, 0, 0, 0), (\pi, \pi, 0, 0), (\pi, \pi, \pi, 0), (\pi, \pi, \pi, \pi)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme dei polinomi reali di grado non superiore a 9 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) ogni autovalore reale di T è inferiore al numero n.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T non può superare n.
   C) T è sempre diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.

5) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\| = \langle v, v\rangle$.
   B) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione strettamente inferiore a quella del suo complemento ortogonale.
   C) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v\rangle < 0$.
   D) se $u, v \in V$ allora $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri interi multipli di 10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei polinomi reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) la matrice $A^2 + B^2$ è regolare.
   B) A, B e C sono invertibili.
   C) A^2 ha determinante positivo.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (2xy, 3xy)$ è una trasformazione lineare.
   B) una trasformazione lineare T da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è invertibile se e solo se lo è T^2.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 in se stessa ha dimensione 0.
   D) la composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m > n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto.
   B) può accadere che A abbia rango 3 e C abbia rango 4.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ ammette come soluzione l'n-upla nulla allora $\rho(A) = n$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali che si annullano nel punto 0 ha dimensione infinita.
   B) un vettore ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base.
   C) il nucleo e l'immagine di un endomorfismo hanno sempre la stessa dimensione.
   D) la $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = -3A$ è una trasformazione lineare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni gruppo contiene infiniti elementi.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $\mathbf{K}$ e V sono campi rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) il polinomio caratteristico di A è uguale al polinomio caratteristico di B.
   B) se A non è simmetrica allora V non ammette una base spettrale relativa a T.
   C) A e B hanno la stessa traccia.
   D) se T ammette n autovalori strettamente negativi allora T è invertibile.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 2x = 0$ è una parabola.
   B) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è ortogonale sia ad u che a v.
   C) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(0, 0, 0)$ è il punto $(1, 2, 3)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 0, 0)$ è $1/6$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) ogni insieme di n vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 con un solo elemento non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   B) se $A \cdot C = B \cdot C$ e C è invertibile allora $A = B$.
   C) se $A^2 = B^2$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali ad 1 allora A è regolare.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $(v_1, \dots , v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\|v_1 + v_2 + \dots + v_n\| = 1$.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle -u, -u \rangle$.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\| + \|v\|$.
   D) se $u, v \in V$ e $\langle u, v \rangle = 0$ allora v è il vettore nullo.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo non può ammettere alcuna soluzione.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se A e C hanno lo stesso rango.
   C) il rango di C è sempre uguale al rango di A.
   D) se $m = n$ e le righe di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = s, z = 0$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 in se stessa ha dimensione 0.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (2xy, 3xy)$ è una trasformazione lineare.
   C) una trasformazione lineare T da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è invertibile se e solo se lo è T^2.
   D) la composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   B) se $m > n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto.
   C) può accadere che A abbia rango 3 e C abbia rango 4.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ ammette come soluzione l'n-upla nulla allora $\rho(A) = n$.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = s, z = 0$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è ortogonale sia ad u che a v.
   B) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(0, 0, 0)$ è il punto $(1, 2, 3)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 0, 0)$ è $1/6$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 2x = 0$ è una parabola.

5) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T è sempre diagonalizzabile.
   B) ogni autovalore reale di T è inferiore al numero n.
   C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T non può superare n.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle -u, -u \rangle$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\| + \|v\|$.
   C) se $u, v \in V$ e $\langle u, v \rangle = 0$ allora v è il vettore nullo.
   D) se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\|v_1 + v_2 + \ldots + v_n\| = 1$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi multipli di 10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei polinomi reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) A, B e C sono invertibili.
   B) A^2 ha determinante positivo.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   D) la matrice $A^2 + B^2$ è regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali il cui primo termine sia uguale a 0, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme $\{(\pi, 0, 0, 0), (\pi, \pi, 0, 0), (\pi, \pi, \pi, 0), (\pi, \pi, \pi, \pi)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme dei polinomi reali di grado non superiore a 9 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con tutti gli elementi uguali a numeri interi è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A^2 = B^2$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   B) se $A \cdot C = B \cdot C$ e C è invertibile allora $A = B$.
   C) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali ad 1 allora A è regolare.
   D) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $\mathbf{K}$ e V sono campi rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$.
   D) ogni gruppo contiene infiniti elementi.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 con un solo elemento non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) ogni insieme di n vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\| = \langle v, v \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle < 0$.
   C) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione strettamente inferiore a quella del suo complemento ortogonale.
   D) se $u, v \in V$ allora $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) il rango di C è sempre uguale al rango di A.
   B) se **S** è un sistema lineare non omogeneo non può ammettere alcuna soluzione.
   C) se $m = n$ e le righe di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   D) **S** ammette soluzione se e solo se A e C hanno lo stesso rango.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo e l'immagine di un endomorfismo hanno sempre la stessa dimensione.
   B) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali che si annullano nel punto 0 ha dimensione infinita.
   C) la $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = -3A$ è una trasformazione lineare.
   D) un vettore ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -1)$ e la retta di equazione $3x - y = 1$ è 2.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 2)$, $(4, 5)$ è $(2, 4)$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, -1)$, $(1, -1, -1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno la stessa traccia.
   B) il polinomio caratteristico di A è uguale al polinomio caratteristico di B.
   C) se T ammette n autovalori strettamente negativi allora T è invertibile.
   D) se A non è simmetrica allora V non ammette una base spettrale relativa a T.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   B) se $m > n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto.
   C) può accadere che A abbia rango 3 e C abbia rango 4.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ ammette come soluzione l'n-upla nulla allora $\rho(A) = n$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T è sempre diagonalizzabile.
   B) ogni autovalore reale di T è inferiore al numero n.
   C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T non può superare n.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\| = \langle v, v \rangle$.
   B) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione strettamente inferiore a quella del suo complemento ortogonale.
   C) se $u, v \in V$ allora $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   D) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle < 0$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $\mathbf{K}$ e V sono campi rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$.
   B) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) ogni gruppo contiene infiniti elementi.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -1)$ e la retta di equazione $3x - y = 1$ è 2.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, -1)$, $(1, -1, -1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 2)$, $(4, 5)$ è $(2, 4)$.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali ad 1 allora A è regolare.
   B) se $A^2 = B^2$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   D) se $A \cdot C = B \cdot C$ e C è invertibile allora $A = B$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 con un solo elemento non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) ogni insieme di n vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 in se stessa ha dimensione 0.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (2xy, 3xy)$ è una trasformazione lineare.
   C) una trasformazione lineare T da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è invertibile se e solo se lo è T^2.
   D) la composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) la matrice $A^2 + B^2$ è regolare.
   B) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   C) A^2 ha determinante positivo.
   D) A, B e C sono invertibili.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $I\!R$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme dei polinomi reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   D) l'insieme dei numeri interi multipli di 10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali che si annullano nel punto 0 ha dimensione infinita.
   B) il nucleo e l'immagine di un endomorfismo hanno sempre la stessa dimensione.
   C) un vettore ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base.
   D) la $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = -3A$ è una trasformazione lineare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con tutti gli elementi uguali a numeri interi è un sottospazio vettoriale di $M_4(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme dei polinomi reali di grado non superiore a 9 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(\pi, 0, 0, 0), (\pi, \pi, 0, 0), (\pi, \pi, \pi, 0), (\pi, \pi, \pi, \pi)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   D) l'insieme delle successioni reali il cui primo termine sia uguale a 0, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = s, z = 0$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\| + \|v\|$.
   B) se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\|v_1 + v_2 + \ldots + v_n\| = 1$.
   C) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle -u, -u \rangle$.
   D) se $u, v \in V$ e $\langle u, v \rangle = 0$ allora v è il vettore nullo.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) il polinomio caratteristico di A è uguale al polinomio caratteristico di B.
   B) A e B hanno la stessa traccia.
   C) se A non è simmetrica allora V non ammette una base spettrale relativa a T.
   D) se T ammette n autovalori strettamente negativi allora T è invertibile.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(0, 0, 0)$ è il punto $(1, 2, 3)$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 2x = 0$ è una parabola.
   C) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è ortogonale sia ad u che a v.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 0, 0)$ è $1/6$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo non può ammettere alcuna soluzione.
   B) il rango di C è sempre uguale al rango di A.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se A e C hanno lo stesso rango.
   D) se $m = n$ e le righe di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\|v_1 + v_2 + \dots + v_n\| = 1$.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle -u, -u \rangle$.
   C) se $u, v \in V$ e $\langle u, v \rangle = 0$ allora v è il vettore nullo.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\| + \|v\|$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) una trasformazione lineare T da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è invertibile se e solo se lo è T^2.
   B) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 in se stessa ha dimensione 0.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (2xy, 3xy)$ è una trasformazione lineare.
   D) la composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A abbia rango 3 e C abbia rango 4.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $\rho(A) < \rho(C)$.
   C) se $m > n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ ammette come soluzione l'n-upla nulla allora $\rho(A) = n$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 2x = 0$ è una parabola.
   B) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è ortogonale sia ad u che a v.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 0, 0)$ è $1/6$.
   D) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(0, 0, 0)$ è il punto $(1, 2, 3)$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni gruppo contiene infiniti elementi.
   B) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $\mathbf{K}$ e V sono campi rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   B) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali ad 1 allora A è regolare.
   C) se $A \cdot C = B \cdot C$ e C è invertibile allora $A = B$.
   D) se $A^2 = B^2$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) ogni insieme di n vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 con un solo elemento non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = s, z = 0$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T non può superare n.
   B) T è sempre diagonalizzabile.
   C) ogni autovalore reale di T è inferiore al numero n.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle < 0$.
   B) se $u, v \in V$ allora $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   C) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione strettamente inferiore a quella del suo complemento ortogonale.
   D) se $v \in V$ allora $\|v\| = \langle v, v \rangle$.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) A^2 ha determinante positivo.
   B) la matrice $A^2 + B^2$ è regolare.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   D) A, B e C sono invertibili.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(\pi, 0, 0, 0), (\pi, \pi, 0, 0), (\pi, \pi, \pi, 0), (\pi, \pi, \pi, \pi)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con tutti gli elementi uguali a numeri interi è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme dei polinomi reali di grado non superiore a 9 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle successioni reali il cui primo termine sia uguale a 0, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo non può ammettere alcuna soluzione.
   B) se $m = n$ e le righe di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se A e C hanno lo stesso rango.
   D) il rango di C è sempre uguale al rango di A.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali che si annullano nel punto 0 ha dimensione infinita.
   B) la $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = -3A$ è una trasformazione lineare.
   C) un vettore ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base.
   D) il nucleo e l'immagine di un endomorfismo hanno sempre la stessa dimensione.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) il polinomio caratteristico di A è uguale al polinomio caratteristico di B.
   B) se T ammette n autovalori strettamente negativi allora T è invertibile.
   C) se A non è simmetrica allora V non ammette una base spettrale relativa a T.
   D) A e B hanno la stessa traccia.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 2)$, $(4, 5)$ è $(2, 4)$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, -1)$, $(1, -1, -1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -1)$ e la retta di equazione $3x - y = 1$ è 2.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   B) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme dei numeri interi multipli di 10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.