Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 8.
   B) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   C) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

2) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $A \cdot B$ è uguale alla matrice nulla allora almeno una delle due matrici A, B è uguale alla matrice nulla.
   B) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   C) se B contiene due righe uguali il suo determinante è nullo.
   D) $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_j^h A_j^h$ (A_j^h denota il complemento algebrico dell'elemento a_j^h in A).

3) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) V ammette almeno una base finita.
   B) $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.
   C) se B è una base di U esiste un sottoinsieme X di V tale che $B \cup X$ è una base di V.
   D) ogni sottoinsieme di V che sia linearmente indipendente è anche una base di V.

4) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

   A) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
   B) $Ker\ T = Im\ T$.
   C) le colonne di A sono linearmente indipendenti.
   D) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se A è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
B) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora ne ammette infinite.
C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se è radice del polinomio caratteristico di T.
B) se $\det A \neq 0$ allora T non può avere autovalori nulli.
C) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
D) il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.

7) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
A) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.
B) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
C) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
D) ogni sottoinsieme ortogonale di V non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

8) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x - y - z = 2$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
B) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
C) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
A) le rette di equazioni cartesiane $4x - 8y = 1$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
B) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
C) la conica di equazione $y = 100x^2$ è una parabola.
D) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^2 è diagonalizzabile per similitudine.
   B) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V esiste un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.
   C) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B è diagonalizzabile per similitudine.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $x + y - 1 = 0$ è $\sqrt{2}$.
   C) la conica di equazione $50y^2 - 100x^2 = 1$ è una ellisse.
   D) le rette di equazioni cartesiane $3x - 9y = 2$ e $3x + 9y = 0$ sono fra loro parallele.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = s - 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T è suriettivo se e solo se $\rho(A) = n$.
   B) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
   C) T è iniettivo se e solo se $Ker\ T = \{\mathbf{0}_V\}$.
   D) se $T \circ T$ è l'identità allora $|\det A| = 1$.

5) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A si ottiene da B permutandone le righe allora $|\det A| = |\det B|$.
   B) se A è ortogonale il suo determinante è nullo.
   C) $A \cdot B = B \cdot A$.
   D) se B è triangolare il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_5$ delle classi di resto modulo 5 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 5.
   B) l'insieme delle matrici quadrate reali di ordine 5 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme degli endomorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   D) l'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   B) se C è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno tre soluzioni allora ne ammette infinite.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.

8) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) l'unione di due basi qualunque di V è una base di V.
   B) se $\dim V = n$ allora tutte le basi di V hanno cardinalità n.
   C) se $U + W = V$ allora $\dim U + \dim W = \dim V$.
   D) se B è una base di V allora è anche un sottoinsieme di V linearmente indipendente.

9) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette almeno una base ortonormale.
   B) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \dots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u^i v^i$.
   C) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim U$.
   D) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_j^h A_j^h$ (A_j^h denota il complemento algebrico dell'elemento a_j^h in A).
   B) se $A \cdot B$ è uguale alla matrice nulla allora almeno una delle due matrici A, B è uguale alla matrice nulla.
   C) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   D) se B contiene due righe uguali il suo determinante è nullo.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora ne ammette infinite.
   D) se A è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

3) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.
   B) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se $\det A \neq 0$ allora T non può avere autovalori nulli.
   D) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se è radice del polinomio caratteristico di T.

4) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   B) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim U$.
   C) V ammette almeno una base ortonormale.
   D) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \dots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u^i v^i$.

5) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) ogni sottoinsieme di V che sia linearmente indipendente è anche una base di V.
   B) V ammette almeno una base finita.
   C) $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.
   D) se B è una base di U esiste un sottoinsieme X di V tale che $B \cup X$ è una base di V.

6) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B.
B) le colonne di A sono linearmente indipendenti.
C) $Ker\ T = Im\ T$.
D) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.

7) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = s - 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
B) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
D) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
A) le rette di equazioni cartesiane $3x - 9y = 2$ e $3x + 9y = 0$ sono fra loro parallele.
B) la conica di equazione $50y^2 - 100x^2 = 1$ è una ellisse.
C) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $x + y - 1 = 0$ è $\sqrt{2}$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

B) l'insieme $\mathbf{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 8.
C) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
D) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
   B) la conica di equazione $y = 100x^2$ è una parabola.
   C) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.
   D) le rette di equazioni cartesiane $4x - 8y = 1$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette almeno tre soluzioni allora ne ammette infinite.
   C) se C è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle matrici quadrate reali di ordine 5 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_5$ delle classi di resto modulo 5 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 5.
   D) l'insieme degli endomorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.

4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.
   B) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B è diagonalizzabile per similitudine.
   C) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V esiste un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.
   D) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^2 è diagonalizzabile per similitudine.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x - y - z = 2$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

6) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   B) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   C) ogni sottoinsieme ortogonale di V non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.
   D) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.

7) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se B è una base di V allora è anche un sottoinsieme di V linearmente indipendente.
   B) se $\dim V = n$ allora tutte le basi di V hanno cardinalità n.
   C) l'unione di due basi qualunque di V è una base di V.
   D) se $U + W = V$ allora $\dim U + \dim W = \dim V$.

8) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se B è triangolare il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della sua diagonale principale.
   B) se A è ortogonale il suo determinante è nullo.
   C) se A si ottiene da B permutandone le righe allora $|\det A| = |\det B|$.
   D) $A \cdot B = B \cdot A$.

9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $T \circ T$ è l'identità allora $|\det A| = 1$.
   B) T è iniettivo se e solo se $Ker\ T = \{\mathbf{0}_V\}$.
   C) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
   D) T è suriettivo se e solo se $\rho(A) = n$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se B è triangolare il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della sua diagonale principale.
   B) se A si ottiene da B permutandone le righe allora $|\det A| = |\det B|$.
   C) se A è ortogonale il suo determinante è nullo.
   D) $A \cdot B = B \cdot A$.

2) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se B è una base di V allora è anche un sottoinsieme di V linearmente indipendente.
   B) l'unione di due basi qualunque di V è una base di V.
   C) se $\dim V = n$ allora tutte le basi di V hanno cardinalità n.
   D) se $U + W = V$ allora $\dim U + \dim W = \dim V$.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x - y - z = 2$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.

4) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

   A) $Ker\ T = Im\ T$.
   B) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
   C) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B.
   D) le colonne di A sono linearmente indipendenti.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora ne ammette infinite.
   B) se A è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   C) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\det A \neq 0$ allora T non può avere autovalori nulli.
   B) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se è radice del polinomio caratteristico di T.
   C) il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.
   D) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

7) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   B) ogni sottoinsieme ortogonale di V non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.
   C) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.
   D) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
   B) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.
   C) le rette di equazioni cartesiane $4x - 8y = 1$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   D) la conica di equazione $y = 100x^2$ è una parabola.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_5$ delle classi di resto modulo 5 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 5.
   C) l'insieme delle matrici quadrate reali di ordine 5 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme degli endomorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim U$.
   B) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   C) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1,\ldots,u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1,\ldots,v^n)$ allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^n u^i v^i$.
   D) V ammette almeno una base ortonormale.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V esiste un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.
   B) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^2 è diagonalizzabile per similitudine.
   C) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B è diagonalizzabile per similitudine.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.

3) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   B) se B contiene due righe uguali il suo determinante è nullo.
   C) se $A \cdot B$ è uguale alla matrice nulla allora almeno una delle due matrici A, B è uguale alla matrice nulla.
   D) $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^h A_j^h$ (A_j^h denota il complemento algebrico dell'elemento a_j^h in A).

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   B) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 8.
   D) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = s - 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $50y^2 - 100x^2 = 1$ è una ellisse.
   B) le rette di equazioni cartesiane $3x - 9y = 2$ e $3x + 9y = 0$ sono fra loro parallele.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $x + y - 1 = 0$ è $\sqrt{2}$.
   D) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
   B) T è suriettivo se e solo se $\rho(A) = n$.
   C) T è iniettivo se e solo se $Ker\ T = \{\mathbf{0}_V\}$.
   D) se $T \circ T$ è l'identità allora $|\det A| = 1$.

8) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.
   B) se B è una base di U esiste un sottoinsieme X di V tale che $B \cup X$ è una base di V.
   C) V ammette almeno una base finita.
   D) ogni sottoinsieme di V che sia linearmente indipendente è anche una base di V.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se C è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno tre soluzioni allora ne ammette infinite.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A è ortogonale il suo determinante è nullo.
   B) $A \cdot B = B \cdot A$.
   C) se B è triangolare il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della sua diagonale principale.
   D) se A si ottiene da B permutandone le righe allora $|\det A| = |\det B|$.

2) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se $\dim V = n$ allora tutte le basi di V hanno cardinalità n.
   B) se $U + W = V$ allora $\dim U + \dim W = \dim V$.
   C) se B è una base di V allora è anche un sottoinsieme di V linearmente indipendente.
   D) l'unione di due basi qualunque di V è una base di V.

3) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $Ker\ T = Im\ T$.
   B) le colonne di A sono linearmente indipendenti.
   C) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
   D) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora ne ammette infinite.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
   C) se A è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $3x - 9y = 2$ e $3x + 9y = 0$ sono fra loro parallele.
   B) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $x + y - 1 = 0$ è $\sqrt{2}$.
   D) la conica di equazione $50y^2 - 100x^2 = 1$ è una ellisse.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) l'insieme delle matrici quadrate reali di ordine 5 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
B) l'insieme degli endomorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
C) l'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
D) l'insieme $\mathbf{Z}_5$ delle classi di resto modulo 5 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 5.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se $\det A \neq 0$ allora T non può avere autovalori nulli.
B) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
C) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se è radice del polinomio caratteristico di T.
D) il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.

8) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
A) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
B) V ammette almeno una base ortonormale.
C) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \ldots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \ldots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u^i v^i$.
D) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim U$.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = s - 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
C) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
D) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette almeno tre soluzioni allora ne ammette infinite.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.
   D) se C è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

2) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x - y - z = 2$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 8.
   B) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   C) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $y = 100x^2$ è una parabola.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
   C) le rette di equazioni cartesiane $4x - 8y = 1$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   D) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

5) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) V ammette almeno una base finita.
   B) $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.
   C) ogni sottoinsieme di V che sia linearmente indipendente è anche una base di V.
   D) se B è una base di U esiste un sottoinsieme X di V tale che $B \cup X$ è una base di V.

6) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $A \cdot B$ è uguale alla matrice nulla allora almeno una delle due matrici A, B è uguale alla matrice nulla.
   B) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   C) $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_j^h A_j^h$ (A_j^h denota il complemento algebrico dell'elemento a_j^h in A).
   D) se B contiene due righe uguali il suo determinante è nullo.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^2 è diagonalizzabile per similitudine.
   B) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B è diagonalizzabile per similitudine.
   C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.
   D) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V esiste un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

8) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T è suriettivo se e solo se $\rho(A) = n$.
   B) T è iniettivo se e solo se $Ker\ T = \{\mathbf{0}_V\}$.
   C) se $T \circ T$ è l'identità allora $|\det A| = 1$.
   D) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.

9) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   B) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   C) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.
   D) ogni sottoinsieme ortogonale di V non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.
   B) ogni sottoinsieme di V che sia linearmente indipendente è anche una base di V.
   C) se B è una base di U esiste un sottoinsieme X di V tale che $B \cup X$ è una base di V.
   D) V ammette almeno una base finita.

2) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x - y - z = 2$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $4x - 8y = 1$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   C) la conica di equazione $y = 100x^2$ è una parabola.
   D) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

4) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

   A) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B.
   B) le colonne di A sono linearmente indipendenti.
   C) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
   D) $Ker\ T = Im\ T$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
   C) se A è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora ne ammette infinite.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.
   B) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se è radice del polinomio caratteristico di T.
   D) se $\det A \neq 0$ allora T non può avere autovalori nulli.

7) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   B) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.
   C) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   D) ogni sottoinsieme ortogonale di V non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   B) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 8.

9) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   B) $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_j^h A_j^h$ (A_j^h denota il complemento algebrico dell'elemento a_j^h in A).
   C) se B contiene due righe uguali il suo determinante è nullo.
   D) se $A \cdot B$ è uguale alla matrice nulla allora almeno una delle due matrici A, B è uguale alla matrice nulla.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = s - 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

2) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim U$.

   B) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \dots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u^i v^i$.
   C) V ammette almeno una base ortonormale.
   D) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.

3) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $A \cdot B = B \cdot A$.
   B) se A si ottiene da B permutandone le righe allora $|\det A| = |\det B|$.
   C) se A è ortogonale il suo determinante è nullo.
   D) se B è triangolare il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme degli endomorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_5$ delle classi di resto modulo 5 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 5.
   C) l'insieme delle matrici quadrate reali di ordine 5 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

5) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se $U + W = V$ allora $\dim U + \dim W = \dim V$.
   B) l'unione di due basi qualunque di V è una base di V.
   C) se $\dim V = n$ allora tutte le basi di V hanno cardinalità n.
   D) se B è una base di V allora è anche un sottoinsieme di V linearmente indipendente.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V esiste un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.
   B) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^2 è diagonalizzabile per similitudine.
   C) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B è diagonalizzabile per similitudine.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se C è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno tre soluzioni allora ne ammette infinite.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.

8) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
   B) T è suriettivo se e solo se $\rho(A) = n$.
   C) T è iniettivo se e solo se $Ker\ T = \{\mathbf{0}_V\}$.
   D) se $T \circ T$ è l'identità allora $|\det A| = 1$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $50y^2 - 100x^2 = 1$ è una ellisse.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $x + y - 1 = 0$ è $\sqrt{2}$.
   C) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
   D) le rette di equazioni cartesiane $3x - 9y = 2$ e $3x + 9y = 0$ sono fra loro parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

   A) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B.
   B) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
   C) $Ker\ T = Im\ T$.
   D) le colonne di A sono linearmente indipendenti.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.
   B) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se è radice del polinomio caratteristico di T.
   C) se $\det A \neq 0$ allora T non può avere autovalori nulli.
   D) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

3) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   B) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim U$.

   C) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \ldots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \ldots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u^i v^i$.
   D) V ammette almeno una base ortonormale.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   B) se A è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora ne ammette infinite.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = s - 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $3x - 9y = 2$ e $3x + 9y = 0$ sono fra loro parallele.
   B) la conica di equazione $50y^2 - 100x^2 = 1$ è una ellisse.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $x + y - 1 = 0$ è $\sqrt{2}$.
   D) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 8.

8) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_j^h A_j^h$ (A_j^h denota il complemento algebrico dell'elemento a_j^h in A).
   B) se B contiene due righe uguali il suo determinante è nullo.
   C) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   D) se $A \cdot B$ è uguale alla matrice nulla allora almeno una delle due matrici A, B è uguale alla matrice nulla.

9) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) ogni sottoinsieme di V che sia linearmente indipendente è anche una base di V.
   B) se B è una base di U esiste un sottoinsieme X di V tale che $B \cup X$ è una base di V.
   C) $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.
   D) V ammette almeno una base finita.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A è ortogonale il suo determinante è nullo.
   B) $A \cdot B = B \cdot A$.
   C) se A si ottiene da B permutandone le righe allora $|\det A| = |\det B|$.
   D) se B è triangolare il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V esiste un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.
   B) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^2 è diagonalizzabile per similitudine.
   C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.
   D) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B è diagonalizzabile per similitudine.

3) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   B) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.
   C) ogni sottoinsieme ortogonale di V non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.
   D) se $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

4) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se $\dim V = n$ allora tutte le basi di V hanno cardinalità n.
   B) se $U + W = V$ allora $\dim U + \dim W = \dim V$.
   C) l'unione di due basi qualunque di V è una base di V.
   D) se B è una base di V allora è anche un sottoinsieme di V linearmente indipendente.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle matrici quadrate reali di ordine 5 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme degli endomorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_5$ delle classi di resto modulo 5 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 5.
   D) l'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

6) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x - y - z = 2$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
D) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se C è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.
D) se $\mathbf{S}$ ammette almeno tre soluzioni allora ne ammette infinite.

8) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
B) T è suriettivo se e solo se $\rho(A) = n$.
C) se $T \circ T$ è l'identità allora $|\det A| = 1$.
D) T è iniettivo se e solo se $Ker\ T = \{\mathbf{0}_V\}$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
B) le rette di equazioni cartesiane $4x - 8y = 1$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
C) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.
D) la conica di equazione $y = 100x^2$ è una parabola.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) l'unione di due basi qualunque di V è una base di V.
   B) se B è una base di V allora è anche un sottoinsieme di V linearmente indipendente.
   C) se $\dim V = n$ allora tutte le basi di V hanno cardinalità n.
   D) se $U + W = V$ allora $\dim U + \dim W = \dim V$.

2) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) le colonne di A sono linearmente indipendenti.
   B) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B.
   C) $Ker\ T = Im\ T$.
   D) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
   B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora ne ammette infinite.
   D) se A è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.
   C) se $\det A \neq 0$ allora T non può avere autovalori nulli.
   D) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se è radice del polinomio caratteristico di T.

5) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A si ottiene da B permutandone le righe allora $|\det A| = |\det B|$.
   B) se B è triangolare il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della sua diagonale principale.
   C) se A è ortogonale il suo determinante è nullo.
   D) $A \cdot B = B \cdot A$.

6) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x - y - z = 2$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $y = 100x^2$ è una parabola.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
   C) le rette di equazioni cartesiane $4x - 8y = 1$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   D) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

8) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   B) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   C) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.
   D) ogni sottoinsieme ortogonale di V non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_5$ delle classi di resto modulo 5 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 5.
   B) l'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici quadrate reali di ordine 5 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme degli endomorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = s - 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.

2) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   B) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \dots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u^i v^i$.
   C) V ammette almeno una base ortonormale.
   D) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim U$.

3) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se B contiene due righe uguali il suo determinante è nullo.
   B) $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^h A_j^h$ (A_j^h denota il complemento algebrico dell'elemento a_j^h in A).
   C) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   D) se $A \cdot B$ è uguale alla matrice nulla allora almeno una delle due matrici A, B è uguale alla matrice nulla.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 8.

5) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se $T \circ T$ è l'identità allora $|\det A| = 1$.
B) T è iniettivo se e solo se $Ker\ T = \{\mathbf{0}_V\}$.
C) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
D) T è suriettivo se e solo se $\rho(A) = n$.

6) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
A) se B è una base di U esiste un sottoinsieme X di V tale che $B \cup X$ è una base di V.
B) ogni sottoinsieme di V che sia linearmente indipendente è anche una base di V.
C) $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.
D) V ammette almeno una base finita.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
A) le rette di equazioni cartesiane $3x - 9y = 2$ e $3x + 9y = 0$ sono fra loro parallele.
B) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $x + y - 1 = 0$ è $\sqrt{2}$.
C) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
D) la conica di equazione $50y^2 - 100x^2 = 1$ è una ellisse.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.
B) se $\mathbf{S}$ ammette almeno tre soluzioni allora ne ammette infinite.
C) se C è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.
B) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B è diagonalizzabile per similitudine.
C) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V esiste un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

D) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^2 è diagonalizzabile per similitudine.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $Ker\ T = Im\ T$.
B) le colonne di A sono linearmente indipendenti.
C) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B.
D) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.

2) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
A) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim U$.

B) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
C) V ammette almeno una base ortonormale.
D) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1,\ldots,u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1,\ldots,v^n)$ allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^n u^i v^i$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora ne ammette infinite.
B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
C) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
D) se A è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

4) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = s-1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
D) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $50y^2 - 100x^2 = 1$ è una ellisse.
   B) le rette di equazioni cartesiane $3x - 9y = 2$ e $3x + 9y = 0$ sono fra loro parallele.
   C) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $x + y - 1 = 0$ è $\sqrt{2}$.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\det A \neq 0$ allora T non può avere autovalori nulli.
   B) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.
   D) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se è radice del polinomio caratteristico di T.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

   B) l'insieme $\mathbf{Z}_5$ delle classi di resto modulo 5 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 5.
   C) l'insieme degli endomorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   D) l'insieme delle matrici quadrate reali di ordine 5 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

8) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se B è triangolare il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della sua diagonale principale.
   B) se A si ottiene da B permutandone le righe allora $|\det A| = |\det B|$.
   C) $A \cdot B = B \cdot A$.
   D) se A è ortogonale il suo determinante è nullo.

9) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se B è una base di V allora è anche un sottoinsieme di V linearmente indipendente.
   B) l'unione di due basi qualunque di V è una base di V.
   C) se $U + W = V$ allora $\dim U + \dim W = \dim V$.
   D) se $\dim V = n$ allora tutte le basi di V hanno cardinalità n.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 8.
   D) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.
   B) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V esiste un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.
   C) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B è diagonalizzabile per similitudine.
   D) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^2 è diagonalizzabile per similitudine.

3) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) ogni sottoinsieme di V che sia linearmente indipendente è anche una base di V.
   B) $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.
   C) V ammette almeno una base finita.
   D) se B è una base di U esiste un sottoinsieme X di V tale che $B \cup X$ è una base di V.

4) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_j^h A_j^h$ (A_j^h denota il complemento algebrico dell'elemento a_j^h in A).
   B) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   C) se $A \cdot B$ è uguale alla matrice nulla allora almeno una delle due matrici A, B è uguale alla matrice nulla.
   D) se B contiene due righe uguali il suo determinante è nullo.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.
   B) se C è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno tre soluzioni allora ne ammette infinite.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $T \circ T$ è l'identità allora $|\det A| = 1$.
   B) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
   C) T è iniettivo se e solo se $Ker\ T = \{\mathbf{0}_V\}$.
   D) T è suriettivo se e solo se $\rho(A) = n$.

7) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) ogni sottoinsieme ortogonale di V non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.
   B) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   C) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   D) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.
   B) la conica di equazione $y = 100x^2$ è una parabola.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
   D) le rette di equazioni cartesiane $4x - 8y = 1$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x - y - z = 2$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x - y - z = 2$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
   B) la conica di equazione $y = 100x^2$ è una parabola.
   C) le rette di equazioni cartesiane $4x - 8y = 1$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   D) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

3) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.
   B) ogni sottoinsieme di V che sia linearmente indipendente è anche una base di V.
   C) se B è una base di U esiste un sottoinsieme X di V tale che $B \cup X$ è una base di V.
   D) V ammette almeno una base finita.

4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se è radice del polinomio caratteristico di T.
   B) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se $\det A \neq 0$ allora T non può avere autovalori nulli.
   D) il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.

5) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   B) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   C) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.
   D) ogni sottoinsieme ortogonale di V non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
B) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
C) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
D) l'insieme $\mathbf{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 8.

7) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
B) $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_j^h A_j^h$ (A_j^h denota il complemento algebrico dell'elemento a_j^h in A).
C) se B contiene due righe uguali il suo determinante è nullo.
D) se $A \cdot B$ è uguale alla matrice nulla allora almeno una delle due matrici A, B è uguale alla matrice nulla.

8) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
B) le colonne di A sono linearmente indipendenti.
C) $Ker\ T = Im\ T$.
D) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se A è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora ne ammette infinite.
D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T è iniettivo se e solo se $Ker\ T = \{\mathbf{0}_V\}$.
   B) T è suriettivo se e solo se $\rho(A) = n$.
   C) se $T \circ T$ è l'identità allora $|\det A| = 1$.
   D) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_5$ delle classi di resto modulo 5 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 5.
   B) l'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme degli endomorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   D) l'insieme delle matrici quadrate reali di ordine 5 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

3) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B è diagonalizzabile per similitudine.
   B) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^2 è diagonalizzabile per similitudine.
   C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.
   D) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V esiste un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $x + y - 1 = 0$ è $\sqrt{2}$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $3x - 9y = 2$ e $3x + 9y = 0$ sono fra loro parallele.
   C) la conica di equazione $50y^2 - 100x^2 = 1$ è una ellisse.
   D) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

5) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) l'unione di due basi qualunque di V è una base di V.
   B) se B è una base di V allora è anche un sottoinsieme di V linearmente indipendente.
   C) se $U + W = V$ allora $\dim U + \dim W = \dim V$.
   D) se $\dim V = n$ allora tutte le basi di V hanno cardinalità n.

6) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
 A) se A si ottiene da B permutandone le righe allora $|\det A| = |\det B|$.
 B) se B è triangolare il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della sua diagonale principale.
 C) $A \cdot B = B \cdot A$.
 D) se A è ortogonale il suo determinante è nullo.

7) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
 A) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \dots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u^i v^i$.
 B) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
 C) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim U$.
 D) V ammette almeno una base ortonormale.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
 A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno tre soluzioni allora ne ammette infinite.
 B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
 C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.
 D) se C è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = s - 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
 A) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
 B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
 C) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
 D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $Ker\ T = Im\ T$.
B) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
C) le colonne di A sono linearmente indipendenti.
D) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora ne ammette infinite.
B) se A è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = s - 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
B) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
D) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
A) le rette di equazioni cartesiane $3x - 9y = 2$ e $3x + 9y = 0$ sono fra loro parallele.
B) la conica di equazione $50y^2 - 100x^2 = 1$ è una ellisse.
C) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $x + y - 1 = 0$ è $\sqrt{2}$.

5) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\det A \neq 0$ allora T non può avere autovalori nulli.
   B) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se è radice del polinomio caratteristico di T.
   C) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.

6) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   B) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim U$.
   C) V ammette almeno una base ortonormale.
   D) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \dots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u^i v^i$.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 8.
   D) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.

8) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_j^h A_j^h$ (A_j^h denota il complemento algebrico dell'elemento a_j^h in A).
   B) se B contiene due righe uguali il suo determinante è nullo.
   C) se $A \cdot B$ è uguale alla matrice nulla allora almeno una delle due matrici A, B è uguale alla matrice nulla.
   D) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari.

9) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) ogni sottoinsieme di V che sia linearmente indipendente è anche una base di V.
   B) se B è una base di U esiste un sottoinsieme X di V tale che $B \cup X$ è una base di V.
   C) V ammette almeno una base finita.
   D) $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $A \cdot B = B \cdot A$.
   B) se B è triangolare il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della sua diagonale principale.
   C) se A è ortogonale il suo determinante è nullo.
   D) se A si ottiene da B permutandone le righe allora $|\det A| = |\det B|$.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme degli endomorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   B) l'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici quadrate reali di ordine 5 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_5$ delle classi di resto modulo 5 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 5.

3) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se $U + W = V$ allora $\dim U + \dim W = \dim V$.
   B) se B è una base di V allora è anche un sottoinsieme di V linearmente indipendente.
   C) se $\dim V = n$ allora tutte le basi di V hanno cardinalità n.
   D) l'unione di due basi qualunque di V è una base di V.

4) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   B) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.
   C) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   D) ogni sottoinsieme ortogonale di V non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette almeno tre soluzioni allora ne ammette infinite.
   C) se C è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se $T \circ T$ è l'identità allora $|\det A| = 1$.
B) T è iniettivo se e solo se $Ker\ T = \{\mathbf{0}_V\}$.
C) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
D) T è suriettivo se e solo se $\rho(A) = n$.

7) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x - y - z = 2$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
C) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
B) le rette di equazioni cartesiane $4x - 8y = 1$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
C) la conica di equazione $y = 100x^2$ è una parabola.
D) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.
B) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B è diagonalizzabile per similitudine.
C) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V esiste un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

D) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^2 è diagonalizzabile per similitudine.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora ne ammette infinite.
   B) se A è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\det A \neq 0$ allora T non può avere autovalori nulli.
   B) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se è radice del polinomio caratteristico di T.
   C) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.

3) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
   B) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   C) ogni sottoinsieme ortogonale di V non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.
   D) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle matrici quadrate reali di ordine 5 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme degli endomorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_5$ delle classi di resto modulo 5 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 5.
   D) l'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x - y - z = 2$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
   B) la conica di equazione $y = 100x^2$ è una parabola.
   C) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.
   D) le rette di equazioni cartesiane $4x - 8y = 1$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.

7) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A è ortogonale il suo determinante è nullo.
   B) $A \cdot B = B \cdot A$.
   C) se A si ottiene da B permutandone le righe allora $|\det A| = |\det B|$.
   D) se B è triangolare il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

8) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se $\dim V = n$ allora tutte le basi di V hanno cardinalità n.
   B) se $U + W = V$ allora $\dim U + \dim W = \dim V$.
   C) l'unione di due basi qualunque di V è una base di V.
   D) se B è una base di V allora è anche un sottoinsieme di V linearmente indipendente.

9) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

   A) $Ker\ T = Im\ T$.
   B) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
   C) le colonne di A sono linearmente indipendenti.
   D) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   B) se $A \cdot B$ è uguale alla matrice nulla allora almeno una delle due matrici A, B è uguale alla matrice nulla.
   C) se B contiene due righe uguali il suo determinante è nullo.
   D) $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_j^h A_j^h$ (A_j^h denota il complemento algebrico dell'elemento a_j^h in A).

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 8.
   C) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

3) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T è iniettivo se e solo se $Ker\ T = \{\mathbf{0}_V\}$.
   B) se $T \circ T$ è l'identità allora $|\det A| = 1$.
   C) T è suriettivo se e solo se $\rho(A) = n$.
   D) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.

4) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.
   B) V ammette almeno una base finita.
   C) se B è una base di U esiste un sottoinsieme X di V tale che $B \cup X$ è una base di V.
   D) ogni sottoinsieme di V che sia linearmente indipendente è anche una base di V.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = s - 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.
B) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

6) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

A) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim U$.

B) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \ldots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \ldots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u^i v^i$.
C) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
D) V ammette almeno una base ortonormale.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B è diagonalizzabile per similitudine.
B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.
C) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^2 è diagonalizzabile per similitudine.
D) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V esiste un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?

A) la conica di equazione $50y^2 - 100x^2 = 1$ è una ellisse.
B) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $x + y - 1 = 0$ è $\sqrt{2}$.
C) le rette di equazioni cartesiane $3x - 9y = 2$ e $3x + 9y = 0$ sono fra loro parallele.
D) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno tre soluzioni allora ne ammette infinite.
B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.
C) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
D) se C è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se B è una base ordinata ortonormale di V e $\mathbf{u} \equiv_B (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_B (v^1, \dots, v^n)$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^n u^i v^i$.
   B) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle > 0$ se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$.
   C) V ammette almeno una base ortonormale.
   D) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale U di V ha dimensione uguale a $\dim U$.

2) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) le colonne di A sono linearmente indipendenti.
   B) $Ker\ T = Im\ T$.
   C) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
   D) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente almeno una soluzione.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora ne ammette infinite.
   C) se A è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $x + y - 1 = 0$ è $\sqrt{2}$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $3x - 9y = 2$ e $3x + 9y = 0$ sono fra loro parallele.
   C) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
   D) la conica di equazione $50y^2 - 100x^2 = 1$ è una ellisse.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_5$ delle classi di resto modulo 5 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto modulo 5.
   B) l'insieme delle matrici quadrate reali di ordine 5 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme degli endomorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.

6) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A si ottiene da B permutandone le righe allora $|\det A| = |\det B|$.
   B) se A è ortogonale il suo determinante è nullo.
   C) se B è triangolare il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della sua diagonale principale.
   D) $A \cdot B = B \cdot A$.

7) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) l'unione di due basi qualunque di V è una base di V.
   B) se $\dim V = n$ allora tutte le basi di V hanno cardinalità n.
   C) se B è una base di V allora è anche un sottoinsieme di V linearmente indipendente.
   D) se $U + W = V$ allora $\dim U + \dim W = \dim V$.

8) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = s - 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle z.

9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) se $\det A \neq 0$ allora T non può avere autovalori nulli.
   C) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se è radice del polinomio caratteristico di T.
   D) il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.
   B) ogni sottoinsieme ortogonale di V non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.
   C) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   D) per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

2) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se B contiene due righe uguali il suo determinante è nullo.
   B) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari.
   C) se $A \cdot B$ è uguale alla matrice nulla allora almeno una delle due matrici A, B è uguale alla matrice nulla.
   D) $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_j^h A_j^h$ (A_j^h denota il complemento algebrico dell'elemento a_j^h in A).

3) Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V finitamente generato. Allora
   A) se B è una base di U esiste un sottoinsieme X di V tale che $B \cup X$ è una base di V.
   B) $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.
   C) V ammette almeno una base finita.
   D) ogni sottoinsieme di V che sia linearmente indipendente è anche una base di V.

4) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $x - y - z = 2$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta non ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano non parallelo all'asse delle y.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno tre soluzioni allora ne ammette infinite.
   B) se C è regolare allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   C) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette alcuna soluzione.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T è iniettivo se e solo se $Ker\ T = \{\mathbf{0}_V\}$.
   B) se H è un insieme di generatori per V allora anche $T(H)$ è un insieme di generatori per V.
   C) T è suriettivo se e solo se $\rho(A) = n$.
   D) se $T \circ T$ è l'identità allora $|\det A| = 1$.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se B è diagonalizzabile per similitudine.
   B) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di T se e solo se in V esiste un vettore non nullo tale che $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.
   C) se T è diagonalizzabile per similitudine allora anche T^2 è diagonalizzabile per similitudine.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $4x - 8y = 1$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   B) siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale. Il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.
   C) la conica di equazione $y = 100x^2$ è una parabola.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(0, 2)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\sqrt{2}/2$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme degli automorfismi di uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 8.
   D) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.