Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) regolari è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali diversi da zero è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.
   C) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x - 2y$.
   D) l'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $({}^tB \cdot C^{-1})^{-1} \cdot {}^t({}^tC \cdot B) = C^2$.
   B) se $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora si ha che $A = B$.
   C) $C \cdot B^{-1} \cdot A$ è invertibile.
   D) $\det \big(A \cdot B^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \cdot B \cdot C\big) > 0$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono nulle al di fuori dell'intervallo $[1, 2]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali continue (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme $\{(0, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 2), (3, 3, 0, 3), (4, 4, 4, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}[t]$ che ammettono 4 come radice è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3)$ è una trasformazione lineare.
   B) non esistono trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ tali che $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Im} T$.
   C) l'applicazione che manda ogni funzione nella sua derivata terza è un endomorfismo sullo spazio vettoriale reale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ di classe C^∞.
   D) se la matrice associata ad un endomorfismo T sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è invertibile, allora T è un automorfismo.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
A) **S** ammette soluzione se e solo se il rango di C coincide col rango di A.
B) se $m = n$ allora **S** ammette soluzione.
C) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
D) se le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti allora **S** ammette soluzione.

6) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
A) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per S allora è una base spettrale anche per $S \circ S$.
B) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
C) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
D) se S e T hanno gli stessi autovalori allora coincidono.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
A) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale allora coincidono.
B) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $2 \cdot T$.
C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
D) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((3, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y - z = 1$ e $2x - 2y + 2z = 1$. Allora
A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{5}{\sqrt{13}}$.
B) nello spazio euclideo standard i punti $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ sono simmetrici rispetto a $(0, 0, 0)$.
C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2t, y = 1, z = -t$ e $x = 3 + t, y = t, z = t$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.
D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra $(1, 2, 3)$ e $(4, 6, 8)$ è $5\sqrt{2}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono n autovalori distinti sia di S che di T allora A e B hanno tracce uguali.
   B) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico devono essere entrambi diagonalizzabili o entrambi non diagonalizzabili.
   C) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale sia per S che per T allora S e T coincidono.
   D) se $S = -T$ allora $A = -B$.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$ è il punto $(-1, -1, -1)$.
   B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
   C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 8.
   D) se $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = -2s$ e $x = 2s - 1, y = 3, z = s + 1$.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se S e T sono due endomorfismi sullo spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S \circ S$ coincide con $T \circ T$ allora S coincide con T.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice A nella matrice ottenuta invertendo l'ordine delle sue due colonne è una trasformazione lineare.
   C) la composizione di due trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   D) tutte le trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ sono suriettive.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ e $B \cdot A = \mathbf{0}$ allora $(A + B)^{100} = A^{100} + B^{100}$.
   B) se $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale anche ${}^tC \cdot {}^tB \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   C) se $A \cdot B = I$ si ha anche che $B \cdot A = I$.
   D) $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.
   B) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x + y - 1$.
   C) l'insieme $(\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ è un campo rispetto alle due operazioni $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) * (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.
   D) l'insieme delle rotazioni del piano è un gruppo rispetto alla usuale composizione.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} - 2\mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   B) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella nulla.
   C) Se la matrice incompleta associata ad $\mathbf{S}$ è quadrata e regolare allora $\mathbf{S}$ ammette solo la soluzione nulla.
   D) può accadere che $\mathbf{S}$ non ammetta soluzioni.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale nullo sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 1, z = 2\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) se $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e l'insieme $\{A, B, C, D\}$ è linearmente indipendente allora tale insieme è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ tali che $a^3_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se, detta $(x_1, \dots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i ed ogni $\mathbf{v} \in V$, allora B è ortonormale.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u}, \beta\mathbf{v} \rangle = \langle \beta\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} \rangle$.
   D) ogni sottoinsieme ortogonale di V dato da n vettori non nulli è una sua base ortogonale.

9 gennaio 2008 NOME: MATRICOLA: 00111

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $\det\big(A \cdot B^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \cdot B \cdot C\big) > 0$.
   B) $({}^tB \cdot C^{-1})^{-1} \cdot \ {}^t({}^tC \cdot B) = C^2$.
   C) se $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora si ha che $A = B$.
   D) $C \cdot B^{-1} \cdot A$ è invertibile.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.
   B) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   C) se $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C coincide col rango di A.

3) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se S e T hanno gli stessi autovalori allora coincidono.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   D) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per S allora è una base spettrale anche per $S \circ S$.

4) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) ogni sottoinsieme ortogonale di V dato da n vettori non nulli è una sua base ortogonale.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u}, \beta\mathbf{v}\rangle = \langle \beta\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}\rangle$.
   C) se, detta $(x_1, \dots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i\rangle$ per ogni indice i ed ogni $\mathbf{v} \in V$, allora B è ortonormale.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}[t]$ che ammettono 4 come radice è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono nulle al di fuori dell'intervallo $[1, 2]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali continue (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme $\{(0, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 2), (3, 3, 0, 3), (4, 4, 4, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se la matrice associata ad un endomorfismo T sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è invertibile, allora T è un automorfismo.
   B) l'applicazione che manda ogni funzione nella sua derivata terza è un endomorfismo sullo spazio vettoriale reale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ di classe C^∞.
   C) non esistono trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ tali che $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Im} T$.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3)$ è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = -2s$ e $x = 2s - 1, y = 3, z = s + 1$.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.
   B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 8.
   C) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$ è il punto $(-1, -1, -1)$.
   D) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ regolari è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali diversi da zero è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.
   D) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x - 2y$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard i punti $(1,2,3)$ e $(3,2,1)$ sono simmetrici rispetto a $(0,0,0)$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2t, y = 1, z = -t$ e $x = 3 + t, y = t, z = t$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra $(1,2,3)$ e $(4,6,8)$ è $5\sqrt{2}$.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1,2)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{5}{\sqrt{13}}$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) può accadere che $\mathbf{S}$ non ammetta soluzioni.
   B) Se la matrice incompleta associata ad $\mathbf{S}$ è quadrata e regolare allora $\mathbf{S}$ ammette solo la soluzione nulla.
   C) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella nulla.
   D) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} - 2\mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle rotazioni del piano è un gruppo rispetto alla usuale composizione.
   B) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x + y - 1$.
   C) esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.
   D) l'insieme $(\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ è un campo rispetto alle due operazioni $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$ e $(a,b) * (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.

4) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $S = -T$ allora $A = -B$.
   B) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale sia per S che per T allora S e T coincidono.
   C) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico devono essere entrambi diagonalizzabili o entrambi non diagonalizzabili.
   D) se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono n autovalori distinti sia di S che di T allora A e B hanno tracce uguali.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y - z = 1$ e $2x - 2y + 2z = 1$. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $2 \cdot T$.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   C) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((3, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$.
   D) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale allora coincidono.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ tali che $a^3_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 1, z = 2\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale nullo sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) se $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e l'insieme $\{A, B, C, D\}$ è linearmente indipendente allora tale insieme è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$.
   B) se $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale anche ${}^tC \cdot {}^tB \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   C) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ e $B \cdot A = \mathbf{0}$ allora $(A + B)^{100} = A^{100} + B^{100}$.
   D) se $A \cdot B = I$ si ha anche che $B \cdot A = I$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) tutte le trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ sono suriettive.
   B) la composizione di due trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice A nella matrice ottenuta invertendo l'ordine delle sue due colonne è una trasformazione lineare.
   D) se S e T sono due endomorfismi sullo spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S \circ S$ coincide con $T \circ T$ allora S coincide con T.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$.
   B) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ e $B \cdot A = \mathbf{0}$ allora $(A+B)^{100} = A^{100} + B^{100}$.
   C) se $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale anche ${}^tC \cdot {}^tB \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   D) se $A \cdot B = I$ si ha anche che $B \cdot A = I$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ tali che $a^3_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale nullo sull'intervallo $[0,1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 1, z = 2\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) se $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e l'insieme $\{A, B, C, D\}$ è linearmente indipendente allora tale insieme è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y - z = 1$ e $2x - 2y + 2z = 1$. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) non esistono trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ tali che $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Im} T$.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x,y,z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3)$ è una trasformazione lineare.
   C) se la matrice associata ad un endomorfismo T sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è invertibile, allora T è un automorfismo.
   D) l'applicazione che manda ogni funzione nella sua derivata terza è un endomorfismo sullo spazio vettoriale reale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ di classe C^∞.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
A) se $m = n$ allora **S** ammette soluzione.
B) **S** ammette soluzione se e solo se il rango di C coincide col rango di A.
C) se le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti allora **S** ammette soluzione.
D) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.

6) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
A) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
B) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per S allora è una base spettrale anche per $S \circ S$.
C) se S e T hanno gli stessi autovalori allora coincidono.
D) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $2 \cdot T$.
B) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((3, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$.
C) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale allora coincidono.
D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) nello spazio euclideo standard i punti $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ sono simmetrici rispetto a $(0, 0, 0)$.
B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra $(1, 2, 3)$ e $(4, 6, 8)$ è $5\sqrt{2}$.
C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{5}{\sqrt{13}}$.
D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2t, y = 1, z = -t$ e $x = 3 + t, y = t, z = t$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
A) l'insieme delle rotazioni del piano è un gruppo rispetto alla usuale composizione.
B) esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.
C) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x + y - 1$.
D) l'insieme $(\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ è un campo rispetto alle due operazioni $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) * (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.

9 gennaio 2008 NOME: MATRICOLA: 01010

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha \mathbf{u}, \beta \mathbf{v} \rangle = \langle \beta \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} \rangle$.
   B) ogni sottoinsieme ortogonale di V dato da n vettori non nulli è una sua base ortogonale.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
   D) se, detta $(x_1, \dots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i ed ogni $\mathbf{v} \in V$, allora B è ortonormale.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico devono essere entrambi diagonalizzabili o entrambi non diagonalizzabili.
   B) se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono n autovalori distinti sia di S che di T allora A e B hanno tracce uguali.
   C) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale sia per S che per T allora S e T coincidono.
   D) se $S = -T$ allora $A = -B$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora si ha che $A = B$.
   B) $C \cdot B^{-1} \cdot A$ è invertibile.
   C) $({}^tB \cdot C^{-1})^{-1} \cdot \ {}^t({}^tC \cdot B) = C^2$.
   D) $\det\big(A \cdot B^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \cdot B \cdot C\big) > 0$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali diversi da zero è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.
   B) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x - 2y$.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ regolari è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = -2s$ e $x = 2s - 1, y = 3, z = s + 1$.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1,0)$, $(2,3)$, $(4,1)$, $(5,4)$ è uguale a 8.
   B) se $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.
   C) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1,1,1)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
   D) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1,1,1)$, $(0,0,0)$ è il punto $(-1,-1,-1)$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice A nella matrice ottenuta invertendo l'ordine delle sue due colonne è una trasformazione lineare.
   B) se S e T sono due endomorfismi sullo spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S \circ S$ coincide con $T \circ T$ allora S coincide con T.
   C) la composizione di due trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   D) tutte le trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ sono suriettive.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali continue (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme $\{(0,1,1,1), (2,0,2,2), (3,3,0,3), (4,4,4,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono nulle al di fuori dell'intervallo $[1,2]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}[t]$ che ammettono 4 come radice è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella nulla.
   B) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} - 2\mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   C) Se la matrice incompleta associata ad $\mathbf{S}$ è quadrata e regolare allora $\mathbf{S}$ ammette solo la soluzione nulla.
   D) può accadere che $\mathbf{S}$ non ammetta soluzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale anche ${}^tC \cdot {}^tB \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   B) se $A \cdot B = I$ si ha anche che $B \cdot A = I$.
   C) $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$.
   D) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ e $B \cdot A = \mathbf{0}$ allora $(A+B)^{100} = A^{100} + B^{100}$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y=1, z=2\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) se $A,B,C,D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e l'insieme $\{A,B,C,D\}$ è linearmente indipendente allora tale insieme è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ tali che $a^3_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale nullo sull'intervallo $[0,1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) non esistono trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ tali che $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Im} T$.
   B) l'applicazione che manda ogni funzione nella sua derivata terza è un endomorfismo sullo spazio vettoriale reale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ di classe C^∞.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x,y,z) = (x+y+z, x^2+y^2+z^2, x^3+y^3+z^3)$ è una trasformazione lineare.
   D) se la matrice associata ad un endomorfismo T sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è invertibile, allora T è un automorfismo.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m,n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.
   B) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C coincide col rango di A.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) se $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.

B) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$ è il punto $(-1, -1, -1)$.

C) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.

D) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 8.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x + y - 1$.

B) l'insieme $(\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ è un campo rispetto alle due operazioni $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) * (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.

C) l'insieme delle rotazioni del piano è un gruppo rispetto alla usuale composizione.

D) esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.

7) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora

A) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.

B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

C) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per S allora è una base spettrale anche per $S \circ S$.

D) se S e T hanno gli stessi autovalori allora coincidono.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

A) ogni sottoinsieme ortogonale di V dato da n vettori non nulli è una sua base ortogonale.

B) se, detta $(x_1, \dots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i ed ogni $\mathbf{v} \in V$, allora B è ortonormale.

C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u}, \beta\mathbf{v} \rangle = \langle \beta\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} \rangle$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = -2s$ e $x = 2s - 1, y = 3, z = s + 1$.

A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.

9 gennaio 2008 NOME: MATRICOLA: 01100

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$. Allora
   A) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} - 2\mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   B) Se la matrice incompleta associata ad $\mathbf{S}$ è quadrata e regolare allora $\mathbf{S}$ ammette solo la soluzione nulla.
   C) può accadere che $\mathbf{S}$ non ammetta soluzioni.
   D) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella nulla.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y - z = 1$ e $2x - 2y + 2z = 1$. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) regolari è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali diversi da zero è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x - 2y$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2t, y = 1, z = -t$ e $x = 3 + t, y = t, z = t$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.
   B) nello spazio euclideo standard i punti $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ sono simmetrici rispetto a $(0, 0, 0)$.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{5}{\sqrt{13}}$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra $(1, 2, 3)$ e $(4, 6, 8)$ è $5\sqrt{2}$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono nulle al di fuori dell'intervallo $[1,2]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali continue (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}[t]$ che ammettono 4 come radice è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(0,1,1,1),(2,0,2,2),(3,3,0,3),(4,4,4,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $({}^tB \cdot C^{-1})^{-1} \cdot \, {}^t({}^tC \cdot B) = C^2$.
   B) se $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora si ha che $A = B$.
   C) $\det\big(A \cdot B^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \cdot B \cdot C\big) > 0$.
   D) $C \cdot B^{-1} \cdot A$ è invertibile.

7) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono n autovalori distinti sia di S che di T allora A e B hanno tracce uguali.
   B) se $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale sia per S che per T allora S e T coincidono.
   C) se $S = -T$ allora $A = -B$.
   D) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico devono essere entrambi diagonalizzabili o entrambi non diagonalizzabili.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se S e T sono due endomorfismi sullo spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S \circ S$ coincide con $T \circ T$ allora S coincide con T.
   B) la composizione di due trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   C) tutte le trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ sono suriettive.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice A nella matrice ottenuta invertendo l'ordine delle sue due colonne è una trasformazione lineare.

9) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   B) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $2 \cdot T$.
   C) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale allora coincidono.
   D) $((-2,0),(0,-2))$ e $((3,0),(0,1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali continue (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}[t]$ che ammettono 4 come radice è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(0,1,1,1),(2,0,2,2),(3,3,0,3),(4,4,4,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono nulle al di fuori dell'intervallo $[1,2]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x+y-z=1$ e $2x-2y+2z=1$. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard i punti $(1,2,3)$ e $(3,2,1)$ sono simmetrici rispetto a $(0,0,0)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1,2)$ e la retta di equazione $2x-3y=1$ è uguale a $\frac{5}{\sqrt{13}}$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x=2t, y=1, z=-t$ e $x=3+t, y=t, z=t$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra $(1,2,3)$ e $(4,6,8)$ è $5\sqrt{2}$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se la matrice associata ad un endomorfismo T sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è invertibile, allora T è un automorfismo.
   B) l'applicazione che manda ogni funzione nella sua derivata terza è un endomorfismo sullo spazio vettoriale reale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ di classe C^∞.
   C) la funzione $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita da $F(x,y,z)=(x+y+z, x^2+y^2+z^2, x^3+y^3+z^3)$ è una trasformazione lineare.
   D) non esistono trasformazioni lineari $T:\mathbb{R}^7\to\mathbb{R}^7$ tali che $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Im} T$.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) se le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti allora **S** ammette soluzione.
   B) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   C) **S** ammette soluzione se e solo se il rango di C coincide col rango di A.
   D) se $m = n$ allora **S** ammette soluzione.

6) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se S e T hanno gli stessi autovalori allora coincidono.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per S allora è una base spettrale anche per $S \circ S$.
   D) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $2 \cdot T$.
   B) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale allora coincidono.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   D) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((3, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali diversi da zero è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x - 2y$.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) regolari è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

9) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora si ha che $A = B$.
   B) $\det\left(A \cdot B^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \cdot B \cdot C\right) > 0$.
   C) $C \cdot B^{-1} \cdot A$ è invertibile.
   D) $({}^tB \cdot C^{-1})^{-1} \cdot {}^t({}^tC \cdot B) = C^2$.

9 gennaio 2008 NOME: MATRICOLA: 01110

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = -2s$ e $x = 2s - 1, y = 3, z = s + 1$.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u}, \beta\mathbf{v} \rangle = \langle \beta\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} \rangle$.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
   C) se, detta $(x_1, \dots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i ed ogni $\mathbf{v} \in V$, allora B è ortonormale.
   D) ogni sottoinsieme ortogonale di V dato da n vettori non nulli è una sua base ortogonale.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B = I$ si ha anche che $B \cdot A = I$.
   B) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ e $B \cdot A = \mathbf{0}$ allora $(A + B)^{100} = A^{100} + B^{100}$.
   C) se $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale anche ${}^tC \cdot {}^tB \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   D) $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $(\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ è un campo rispetto alle due operazioni $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) * (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.
   B) esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.
   C) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x + y - 1$.
   D) l'insieme delle rotazioni del piano è un gruppo rispetto alla usuale composizione.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e l'insieme $\{A, B, C, D\}$ è linearmente indipendente allora tale insieme è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale nullo sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 1, z = 2\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ tali che $a^3_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

6) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico devono essere entrambi diagonalizzabili o entrambi non diagonalizzabili.
   B) se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono n autovalori distinti sia di S che di T allora A e B hanno tracce uguali.
   C) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale sia per S che per T allora S e T coincidono.
   D) se $S = -T$ allora $A = -B$.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella nulla.
   B) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} - 2\mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   C) Se la matrice incompleta associata ad $\mathbf{S}$ è quadrata e regolare allora $\mathbf{S}$ ammette solo la soluzione nulla.
   D) può accadere che $\mathbf{S}$ non ammetta soluzioni.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice A nella matrice ottenuta invertendo l'ordine delle sue due colonne è una trasformazione lineare.
   B) se S e T sono due endomorfismi sullo spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S \circ S$ coincide con $T \circ T$ allora S coincide con T.
   C) la composizione di due trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   D) tutte le trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ sono suriettive.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1,0)$, $(2,3)$, $(4,1)$, $(5,4)$ è uguale a 8.
   B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1,1,1)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
   C) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1,1,1)$, $(0,0,0)$ è il punto $(-1,-1,-1)$.
   D) se $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se la matrice associata ad un endomorfismo T sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è invertibile, allora T è un automorfismo.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3)$ è una trasformazione lineare.
   C) non esistono trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ tali che $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Im} T$.
   D) l'applicazione che manda ogni funzione nella sua derivata terza è un endomorfismo sullo spazio vettoriale reale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ di classe C^∞.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se S e T hanno gli stessi autovalori allora coincidono.
   B) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per S allora è una base spettrale anche per $S \circ S$.
   C) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   D) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) ogni sottoinsieme ortogonale di V dato da n vettori non nulli è una sua base ortogonale.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u}, \beta\mathbf{v} \rangle = \langle \beta\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} \rangle$.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
   D) se, detta $(x_1, \dots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i ed ogni $\mathbf{v} \in V$, allora B è ortonormale.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C coincide col rango di A.
   C) se $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.
   D) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = -2s$ e $x = 2s - 1, y = 3, z = s + 1$.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.
   B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 8.
   C) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
   D) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$ è il punto $(-1, -1, -1)$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x - 2y$.
   C) l'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali diversi da zero è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ regolari è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $\det\big(A \cdot B^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \cdot B \cdot C\big) > 0$.
   B) $C \cdot B^{-1} \cdot A$ è invertibile.
   C) se $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora si ha che $A = B$.
   D) $({}^tB \cdot C^{-1})^{-1} \cdot {}^t({}^tC \cdot B) = C^2$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}[t]$ che ammettono 4 come radice è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(0, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 2), (3, 3, 0, 3), (4, 4, 4, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali continue (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono nulle al di fuori dell'intervallo $[1, 2]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale anche ${}^tC \cdot {}^tB \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   B) se $A \cdot B = I$ si ha anche che $B \cdot A = I$.
   C) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ e $B \cdot A = \mathbf{0}$ allora $(A + B)^{100} = A^{100} + B^{100}$.
   D) $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico devono essere entrambi diagonalizzabili o entrambi non diagonalizzabili.
   B) se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono n autovalori distinti sia di S che di T allora A e B hanno tracce uguali.
   C) se $S = -T$ allora $A = -B$.
   D) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale sia per S che per T allora S e T coincidono.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $2 \cdot T$.
   B) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale allora coincidono.
   C) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((3, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 1, z = 2\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) se $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e l'insieme $\{A, B, C, D\}$ è linearmente indipendente allora tale insieme è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale nullo sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ tali che $a^3_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x + y - 1$.
   B) l'insieme $(\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ è un campo rispetto alle due operazioni $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) * (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.
   C) esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.
   D) l'insieme delle rotazioni del piano è un gruppo rispetto alla usuale composizione.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x+y-z=1$ e $2x-2y+2z=1$. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella nulla.
   B) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x}-2\mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   C) può accadere che $\mathbf{S}$ non ammetta soluzioni.
   D) Se la matrice incompleta associata ad $\mathbf{S}$ è quadrata e regolare allora $\mathbf{S}$ ammette solo la soluzione nulla.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice A nella matrice ottenuta invertendo l'ordine delle sue due colonne è una trasformazione lineare.
   B) se S e T sono due endomorfismi sullo spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S \circ S$ coincide con $T \circ T$ allora S coincide con T.
   C) tutte le trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ sono suriettive.
   D) la composizione di due trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard i punti $(1,2,3)$ e $(3,2,1)$ sono simmetrici rispetto a $(0,0,0)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1,2)$ e la retta di equazione $2x-3y=1$ è uguale a $\frac{5}{\sqrt{13}}$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra $(1,2,3)$ e $(4,6,8)$ è $5\sqrt{2}$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x=2t, y=1, z=-t$ e $x=3+t, y=t, z=t$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale nullo sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ tali che $a^3_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x-y = 1, z = 2\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) se $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e l'insieme $\{A, B, C, D\}$ è linearmente indipendente allora tale insieme è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'applicazione che manda ogni funzione nella sua derivata terza è un endomorfismo sullo spazio vettoriale reale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ di classe C^∞.
   B) se la matrice associata ad un endomorfismo T sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è invertibile, allora T è un automorfismo.
   C) non esistono trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ tali che $\dim \mathrm{Ker}\, T = \dim \mathrm{Im}\, T$.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3)$ è una trasformazione lineare.

3) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   B) se le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti allora **S** ammette soluzione.
   C) se $m = n$ allora **S** ammette soluzione.
   D) **S** ammette soluzione se e solo se il rango di C coincide col rango di A.

4) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) se S e T hanno gli stessi autovalori allora coincidono.
   C) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   D) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per S allora è una base spettrale anche per $S \circ S$.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ e $B \cdot A = \mathbf{0}$ allora $(A+B)^{100} = A^{100} + B^{100}$.
   B) $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$.
   C) se $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale anche ${}^tC \cdot {}^tB \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   D) se $A \cdot B = I$ si ha anche che $B \cdot A = I$.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y - z = 1$ e $2x - 2y + 2z = 1$. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2t, y = 1, z = -t$ e $x = 3 + t, y = t, z = t$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.
   B) nello spazio euclideo standard i punti $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ sono simmetrici rispetto a $(0, 0, 0)$.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{5}{\sqrt{13}}$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra $(1, 2, 3)$ e $(4, 6, 8)$ è $5\sqrt{2}$.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   B) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $2 \cdot T$.
   C) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale allora coincidono.
   D) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((3, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.
   B) l'insieme delle rotazioni del piano è un gruppo rispetto alla usuale composizione.
   C) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x + y - 1$.
   D) l'insieme $(\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ è un campo rispetto alle due operazioni $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) * (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = -2s$ e $x = 2s - 1, y = 3, z = s + 1$.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) ogni sottoinsieme ortogonale di V dato da n vettori non nulli è una sua base ortogonale.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
   C) se, detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i ed ogni $\mathbf{v} \in V$, allora B è ortonormale.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u}, \beta\mathbf{v} \rangle = \langle \beta\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} \rangle$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $C \cdot B^{-1} \cdot A$ è invertibile.
   B) $\det\left(A \cdot B^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \cdot B \cdot C\right) > 0$.
   C) se $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora si ha che $A = B$.
   D) $({}^tB \cdot C^{-1})^{-1} \cdot {}^t({}^tC \cdot B) = C^2$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x - 2y$.
   B) l'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali diversi da zero è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ regolari è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) tutte le trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ sono suriettive.
   B) la composizione di due trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice A nella matrice ottenuta invertendo l'ordine delle sue due colonne è una trasformazione lineare.
   D) se S e T sono due endomorfismi sullo spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S \circ S$ coincide con $T \circ T$ allora S coincide con T.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(0,1,1,1),(2,0,2,2),(3,3,0,3),(4,4,4,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}[t]$ che ammettono 4 come radice è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali continue (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono nulle al di fuori dell'intervallo $[1,2]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{u}=(x_1,x_2,x_3)$ e $\mathbf{v}=(y_1,y_2,y_3)$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}=(x_2y_3-x_3y_2, x_3y_1-x_1y_3, x_1y_2-x_2y_1)$.
   B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1,1,1)$ e il piano di equazione cartesiana $2x+y-3z=1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
   C) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1,1,1)$, $(0,0,0)$ è il punto $(-1,-1,-1)$.
   D) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1,0)$, $(2,3)$, $(4,1)$, $(5,4)$ è uguale a 8.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1,\dots,x_n$. Allora
   A) può accadere che $\mathbf{S}$ non ammetta soluzioni.
   B) Se la matrice incompleta associata ad $\mathbf{S}$ è quadrata e regolare allora $\mathbf{S}$ ammette solo la soluzione nulla.
   C) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella nulla.
   D) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x}-2\mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

9) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $S=-T$ allora $A=-B$.
   B) se $(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n)$ è una base spettrale sia per S che per T allora S e T coincidono.
   C) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico devono essere entrambi diagonalizzabili o entrambi non diagonalizzabili.
   D) se $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sono n autovalori distinti sia di S che di T allora A e B hanno tracce uguali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) non esistono trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ tali che $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Im} T$.
   B) l'applicazione che manda ogni funzione nella sua derivata terza è un endomorfismo sullo spazio vettoriale reale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ di classe C^∞.
   C) se la matrice associata ad un endomorfismo T sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è invertibile, allora T è un automorfismo.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3)$ è una trasformazione lineare.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u}, \beta\mathbf{v} \rangle = \langle \beta\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} \rangle$.
   B) ogni sottoinsieme ortogonale di V dato da n vettori non nulli è una sua base ortogonale.
   C) se, detta $(x_1, \dots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i ed ogni $\mathbf{v} \in V$, allora B è ortonormale.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.
   B) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C coincide col rango di A.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = -2s$ e $x = 2s - 1, y = 3, z = s + 1$.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1,0)$, $(2,3)$, $(4,1)$, $(5,4)$ è uguale a 8.
   B) se $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.
   C) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1,1,1)$, $(0,0,0)$ è il punto $(-1,-1,-1)$.
   D) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1,1,1)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.

6) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se S e T hanno gli stessi autovalori allora coincidono.
   D) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per S allora è una base spettrale anche per $S \circ S$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle rotazioni del piano è un gruppo rispetto alla usuale composizione.
   B) esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.
   C) l'insieme $(\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ è un campo rispetto alle due operazioni $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$ e $(a,b) * (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.
   D) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x + y - 1$.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$.
   B) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ e $B \cdot A = \mathbf{0}$ allora $(A+B)^{100} = A^{100} + B^{100}$.
   C) se $A \cdot B = I$ si ha anche che $B \cdot A = I$.
   D) se $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale anche ${}^tC \cdot {}^tB \cdot {}^tA$ è ortogonale.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ tali che $a^3_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale nullo sull'intervallo $[0,1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) se $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e l'insieme $\{A, B, C, D\}$ è linearmente indipendente allora tale insieme è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 1, z = 2\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali diversi da zero è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) regolari è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x - 2y$.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $S = -T$ allora $A = -B$.
   B) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico devono essere entrambi diagonalizzabili o entrambi non diagonalizzabili.
   C) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale sia per S che per T allora S e T coincidono.
   D) se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono n autovalori distinti sia di S che di T allora A e B hanno tracce uguali.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}[t]$ che ammettono 4 come radice è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali continue (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono nulle al di fuori dell'intervallo $[1, 2]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(0, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 2), (3, 3, 0, 3), (4, 4, 4, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

4) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $\det\left(A \cdot B^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \cdot B \cdot C\right) > 0$.
   B) se $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora si ha che $A = B$.
   C) $({}^tB \cdot C^{-1})^{-1} \cdot {}^t({}^tC \cdot B) = C^2$.
   D) $C \cdot B^{-1} \cdot A$ è invertibile.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) può accadere che $\mathbf{S}$ non ammetta soluzioni.
   B) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella nulla.
   C) Se la matrice incompleta associata ad $\mathbf{S}$ è quadrata e regolare allora $\mathbf{S}$ ammette solo la soluzione nulla.
   D) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} - 2\mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) tutte le trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ sono suriettive.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice A nella matrice ottenuta invertendo l'ordine delle sue due colonne è una trasformazione lineare.
   C) la composizione di due trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   D) se S e T sono due endomorfismi sullo spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S \circ S$ coincide con $T \circ T$ allora S coincide con T.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((3, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   C) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $2 \cdot T$.
   D) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale allora coincidono.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra $(1, 2, 3)$ e $(4, 6, 8)$ è $5\sqrt{2}$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2t, y = 1, z = -t$ e $x = 3 + t, y = t, z = t$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.
   C) nello spazio euclideo standard i punti $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ sono simmetrici rispetto a $(0, 0, 0)$.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{5}{\sqrt{13}}$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y - z = 1$ e $2x - 2y + 2z = 1$. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y - z = 1$ e $2x - 2y + 2z = 1$. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard i punti $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ sono simmetrici rispetto a $(0, 0, 0)$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2t, y = 1, z = -t$ e $x = 3 + t, y = t, z = t$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{5}{\sqrt{13}}$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra $(1, 2, 3)$ e $(4, 6, 8)$ è $5\sqrt{2}$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali continue (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}[t]$ che ammettono 4 come radice è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(0, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 2), (3, 3, 0, 3), (4, 4, 4, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono nulle al di fuori dell'intervallo $[1, 2]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per S allora è una base spettrale anche per $S \circ S$.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   D) se S e T hanno gli stessi autovalori allora coincidono.

5) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $2 \cdot T$.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   C) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale allora coincidono.
   D) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((3, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali diversi da zero è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x - 2y$.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ regolari è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora si ha che $A = B$.
   B) $\det\left(A \cdot B^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \cdot B \cdot C\right) > 0$.
   C) $C \cdot B^{-1} \cdot A$ è invertibile.
   D) $({}^tB \cdot C^{-1})^{-1} \cdot \ {}^t({}^tC \cdot B) = C^2$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3)$ è una trasformazione lineare.
   B) l'applicazione che manda ogni funzione nella sua derivata terza è un endomorfismo sullo spazio vettoriale reale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ di classe C^∞.
   C) non esistono trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ tali che $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Im} T$.
   D) se la matrice associata ad un endomorfismo T sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è invertibile, allora T è un automorfismo.

9) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) **S** ammette soluzione se e solo se il rango di C coincide col rango di A.
   B) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   C) se $m = n$ allora **S** ammette soluzione.
   D) se le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti allora **S** ammette soluzione.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la composizione di due trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   B) se S e T sono due endomorfismi sullo spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S \circ S$ coincide con $T \circ T$ allora S coincide con T.
   C) tutte le trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ sono suriettive.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice A nella matrice ottenuta invertendo l'ordine delle sue due colonne è una trasformazione lineare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.
   B) l'insieme delle rotazioni del piano è un gruppo rispetto alla usuale composizione.
   C) l'insieme $(\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ è un campo rispetto alle due operazioni $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) * (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.
   D) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x + y - 1$.

3) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale sia per S che per T allora S e T coincidono.
   B) se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono n autovalori distinti sia di S che di T allora A e B hanno tracce uguali.
   C) se $S = -T$ allora $A = -B$.
   D) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico devono essere entrambi diagonalizzabili o entrambi non diagonalizzabili.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
   B) se $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.
   C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 8.
   D) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$ è il punto $(-1, -1, -1)$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale nullo sull'intervallo $[0,1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ tali che $a^3_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) se $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e l'insieme $\{A, B, C, D\}$ è linearmente indipendente allora tale insieme è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x-y = 1, z = 2\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ e $B \cdot A = \mathbf{0}$ allora $(A+B)^{100} = A^{100} + B^{100}$.
   B) $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$.
   C) se $A \cdot B = I$ si ha anche che $B \cdot A = I$.
   D) se $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale anche ${}^tC \cdot {}^tB \cdot {}^tA$ è ortogonale.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
   B) ogni sottoinsieme ortogonale di V dato da n vettori non nulli è una sua base ortogonale.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u}, \beta\mathbf{v} \rangle = \langle \beta\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} \rangle$.
   D) se, detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i ed ogni $\mathbf{v} \in V$, allora B è ortonormale.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$. Allora
   A) Se la matrice incompleta associata ad $\mathbf{S}$ è quadrata e regolare allora $\mathbf{S}$ ammette solo la soluzione nulla.
   B) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} - 2\mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   C) può accadere che $\mathbf{S}$ non ammetta soluzioni.
   D) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella nulla.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = -2s$ e $x = 2s-1, y = 3, z = s+1$.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) non esistono trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ tali che $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Im} T$.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3)$ è una trasformazione lineare.
   C) l'applicazione che manda ogni funzione nella sua derivata terza è un endomorfismo sullo spazio vettoriale reale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ di classe C^∞.
   D) se la matrice associata ad un endomorfismo T sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è invertibile, allora T è un automorfismo.

2) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) se $m = n$ allora **S** ammette soluzione.
   B) **S** ammette soluzione se e solo se il rango di C coincide col rango di A.
   C) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   D) se le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti allora **S** ammette soluzione.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = -2s$ e $x = 2s - 1, y = 3, z = s + 1$.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.
   B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 8.
   C) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$ è il punto $(-1, -1, -1)$.
   D) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.

5) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   B) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per S allora è una base spettrale anche per $S \circ S$.
   C) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) se S e T hanno gli stessi autovalori allora coincidono.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) ogni sottoinsieme ortogonale di V dato da n vettori non nulli è una sua base ortogonale.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u}, \beta\mathbf{v} \rangle = \langle \beta\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} \rangle$.
   C) se, detta $(x_1, \dots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i ed ogni $\mathbf{v} \in V$, allora B è ortonormale.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x - 2y$.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ regolari è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali diversi da zero è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $\det\left(A \cdot B^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \cdot B \cdot C\right) > 0$.
   B) $C \cdot B^{-1} \cdot A$ è invertibile.
   C) $({}^tB \cdot C^{-1})^{-1} \cdot {}^t({}^tC \cdot B) = C^2$.
   D) se $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora si ha che $A = B$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}[t]$ che ammettono 4 come radice è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(0,1,1,1), (2,0,2,2), (3,3,0,3), (4,4,4,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono nulle al di fuori dell'intervallo $[1,2]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali continue (dotato delle usuali operazioni).

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B = I$ si ha anche che $B \cdot A = I$.
   B) $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$.
   C) se $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale anche ${}^tC \cdot {}^tB \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   D) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ e $B \cdot A = \mathbf{0}$ allora $(A + B)^{100} = A^{100} + B^{100}$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $(\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ è un campo rispetto alle due operazioni $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) * (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.
   B) l'insieme delle rotazioni del piano è un gruppo rispetto alla usuale composizione.
   C) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x + y - 1$.
   D) esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e l'insieme $\{A, B, C, D\}$ è linearmente indipendente allora tale insieme è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ tali che $a^3_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 1, z = 2\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale nullo sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $2 \cdot T$.
   B) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale allora coincidono.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   D) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((3, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$. Allora
   A) può accadere che $\mathbf{S}$ non ammetta soluzioni.
   B) Se la matrice incompleta associata ad $\mathbf{S}$ è quadrata e regolare allora $\mathbf{S}$ ammette solo la soluzione nulla.
   C) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella nulla.
   D) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} - 2\mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) tutte le trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ sono suriettive.
   B) la composizione di due trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice A nella matrice ottenuta invertendo l'ordine delle sue due colonne è una trasformazione lineare.
   D) se S e T sono due endomorfismi sullo spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S \circ S$ coincide con $T \circ T$ allora S coincide con T.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y - z = 1$ e $2x - 2y + 2z = 1$. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard i punti $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ sono simmetrici rispetto a $(0, 0, 0)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{5}{\sqrt{13}}$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2t, y = 1, z = -t$ e $x = 3 + t, y = t, z = t$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra $(1, 2, 3)$ e $(4, 6, 8)$ è $5\sqrt{2}$.

9) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $S = -T$ allora $A = -B$.
   B) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale sia per S che per T allora S e T coincidono.
   C) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico devono essere entrambi diagonalizzabili o entrambi non diagonalizzabili.
   D) se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono n autovalori distinti sia di S che di T allora A e B hanno tracce uguali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C coincide col rango di A.
   C) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   B) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per S allora è una base spettrale anche per $S \circ S$.
   C) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) se S e T hanno gli stessi autovalori allora coincidono.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $2 \cdot T$.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
   C) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((3, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$.
   D) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale allora coincidono.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x + y - 1$.
   B) l'insieme $(\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ è un campo rispetto alle due operazioni $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) * (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.
   C) esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.
   D) l'insieme delle rotazioni del piano è un gruppo rispetto alla usuale composizione.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y - z = 1$ e $2x - 2y + 2z = 1$. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) nello spazio euclideo standard i punti $(1,2,3)$ e $(3,2,1)$ sono simmetrici rispetto a $(0,0,0)$.

B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2t, y = 1, z = -t$ e $x = 3+t, y = t, z = t$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra $(1,2,3)$ e $(4,6,8)$ è $5\sqrt{2}$.

D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1,2)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{5}{\sqrt{13}}$.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora

A) se $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale anche ${}^tC \cdot {}^tB \cdot {}^tA$ è ortogonale.

B) se $A \cdot B = I$ si ha anche che $B \cdot A = I$.

C) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ e $B \cdot A = \mathbf{0}$ allora $(A+B)^{100} = A^{100} + B^{100}$.

D) $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 1, z = 2\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

B) se $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e l'insieme $\{A, B, C, D\}$ è linearmente indipendente allora tale insieme è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

C) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale nullo sull'intervallo $[0,1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

D) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ tali che $a^3_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):

A) non esistono trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ tali che $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Im} T$.

B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x,y,z) = (x+y+z, x^2+y^2+z^2, x^3+y^3+z^3)$ è una trasformazione lineare.

C) l'applicazione che manda ogni funzione nella sua derivata terza è un endomorfismo sullo spazio vettoriale reale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ di classe C^∞.

D) se la matrice associata ad un endomorfismo T sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è invertibile, allora T è un automorfismo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora si ha che $A = B$.
   B) $({}^tB \cdot C^{-1})^{-1} \cdot \; {}^t({}^tC \cdot B) = C^2$.
   C) $C \cdot B^{-1} \cdot A$ è invertibile.
   D) $\det\big(A \cdot B^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \cdot B \cdot C\big) > 0$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali diversi da zero è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) regolari è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x - 2y$.
   D) l'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la composizione di due trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   B) tutte le trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ sono suriettive.
   C) se S e T sono due endomorfismi sullo spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S \circ S$ coincide con $T \circ T$ allora S coincide con T.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice A nella matrice ottenuta invertendo l'ordine delle sue due colonne è una trasformazione lineare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali continue (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono nulle al di fuori dell'intervallo $[1, 2]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(0, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 2), (3, 3, 0, 3), (4, 4, 4, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}[t]$ che ammettono 4 come radice è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = -2s$ e $x = 2s - 1, y = 3, z = s + 1$.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

6) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u}, \beta\mathbf{v}\rangle = \langle \beta\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}\rangle$.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
   C) ogni sottoinsieme ortogonale di V dato da n vettori non nulli è una sua base ortogonale.
   D) se, detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i\rangle$ per ogni indice i ed ogni $\mathbf{v} \in V$, allora B è ortonormale.

7) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale sia per S che per T allora S e T coincidono.
   B) se $S = -T$ allora $A = -B$.
   C) se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono n autovalori distinti sia di S che di T allora A e B hanno tracce uguali.
   D) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico devono essere entrambi diagonalizzabili o entrambi non diagonalizzabili.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 8.
   B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
   C) se $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.
   D) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$ è il punto $(-1, -1, -1)$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$. Allora
   A) Se la matrice incompleta associata ad $\mathbf{S}$ è quadrata e regolare allora $\mathbf{S}$ ammette solo la soluzione nulla.
   B) può accadere che $\mathbf{S}$ non ammetta soluzioni.
   C) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} - 2\mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   D) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella nulla.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
   B) ogni sottoinsieme ortogonale di V dato da n vettori non nulli è una sua base ortogonale.
   C) se, detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i ed ogni $\mathbf{v} \in V$, allora B è ortonormale.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u}, \beta\mathbf{v} \rangle = \langle \beta\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} \rangle$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'applicazione che manda ogni funzione nella sua derivata terza è un endomorfismo sullo spazio vettoriale reale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ di classe C^∞.
   B) non esistono trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ tali che $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Im} T$.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3)$ è una trasformazione lineare.
   D) se la matrice associata ad un endomorfismo T sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è invertibile, allora T è un automorfismo.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   B) se $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C coincide col rango di A.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
   B) se $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.
   C) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$ è il punto $(-1, -1, -1)$.
   D) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ è uguale a 8.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.

B) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x + y - 1$.

C) l'insieme delle rotazioni del piano è un gruppo rispetto alla usuale composizione.

D) l'insieme $(\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ è un campo rispetto alle due operazioni $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) * (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora

A) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ e $B \cdot A = \mathbf{0}$ allora $(A + B)^{100} = A^{100} + B^{100}$.

B) se $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale anche ${}^tC \cdot {}^tB \cdot {}^tA$ è ortogonale.

C) $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$.

D) se $A \cdot B = I$ si ha anche che $B \cdot A = I$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale nullo sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 1, z = 2\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

C) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ tali che $a^3_7 = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

D) se $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e l'insieme $\{A, B, C, D\}$ è linearmente indipendente allora tale insieme è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = -2s$ e $x = 2s - 1, y = 3, z = s + 1$.

A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.

9) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora

A) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

B) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.

C) se $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per S allora è una base spettrale anche per $S \circ S$.

D) se S e T hanno gli stessi autovalori allora coincidono.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale allora coincidono.
   B) $((-2,0),(0,-2))$ e $((3,0),(0,1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$.
   C) per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$.
   D) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $2 \cdot T$.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $C \cdot B^{-1} \cdot A$ è invertibile.
   B) se $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora si ha che $A = B$.
   C) $({}^tB \cdot C^{-1})^{-1} \cdot {}^t({}^tC \cdot B) = C^2$.
   D) $\det\big(A \cdot B^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \cdot B \cdot C\big) > 0$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(0,1,1,1),(2,0,2,2),(3,3,0,3),(4,4,4,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali continue (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono nulle al di fuori dell'intervallo $[1,2]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}[t]$ che ammettono 4 come radice è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x+y-z=1$ e $2x-2y+2z=1$. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1,\dots,x_n$. Allora
   A) Se la matrice incompleta associata ad $\mathbf{S}$ è quadrata e regolare allora $\mathbf{S}$ ammette solo la soluzione nulla.
   B) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella nulla.
   C) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} - 2\mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   D) può accadere che $\mathbf{S}$ non ammetta soluzioni.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la composizione di due trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice A nella matrice ottenuta invertendo l'ordine delle sue due colonne è una trasformazione lineare.
   C) se S e T sono due endomorfismi sullo spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S \circ S$ coincide con $T \circ T$ allora S coincide con T.
   D) tutte le trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ sono suriettive.

7) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale sia per S che per T allora S e T coincidono.
   B) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico devono essere entrambi diagonalizzabili o entrambi non diagonalizzabili.
   C) se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono n autovalori distinti sia di S che di T allora A e B hanno tracce uguali.
   D) se $S = -T$ allora $A = -B$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{5}{\sqrt{13}}$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra $(1, 2, 3)$ e $(4, 6, 8)$ è $5\sqrt{2}$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2t, y = 1, z = -t$ e $x = 3 + t, y = t, z = t$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.
   D) nello spazio euclideo standard i punti $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ sono simmetrici rispetto a $(0, 0, 0)$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = x - 2y$.
   B) l'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali diversi da zero è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ regolari è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.