Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 multiple della matrice identica è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione di unione.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Siano A, B e C tre matrici reali 7×9. Allora
   A) $A \cdot {}^tB \cdot C$ è una matrice 7×9.
   B) $B \cdot (A - C) = B \cdot A - B \cdot C$.
   C) se A ha tre righe uguali deve essere $\rho(A) \leq 5$.
   D) $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali nulle dal decimo termine in poi è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_{4\times4}(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che si annullano su tutti i numeri negativi, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R^2$ definita da $F(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.
   B) se $T : I\!R^7 \to I\!R^7$ è una trasformazione lineare allora è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   C) se $A \in M_5(I\!R)$ è regolare allora ogni trasformazione avente A come matrice associata è un isomorfismo.
   D) tutte le trasformazioni lineari sono invertibili.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto se e solo **S** ha più equazioni che incognite.
   B) **S** ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   C) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^8$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^8$, da un (opportuno) sistema lineare di 3 equazioni in 8 incognite.
   D) se le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti allora **S** ammette almeno una soluzione.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) A è diagonalizzabile per similitudine.
   B) t^{n-1} non può essere il polinomio caratteristico $p(t)$ di A.
   C) T è diagonalizzabile se e solo la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) tutte le matrici reali $n \times n$ simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) una trasformazione lineare $T : V \to W$ si dice ortogonale se si ha $\langle T(u), T(v) \rangle = 0$ per ogni $u, v \in V$.
   B) se $u \in V$ allora si ha che $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo di V.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   D) se $u \in V$ e $\beta \in \mathbb{R}$ allora $\|\beta u\| = |\beta| \cdot \|u\|$.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - y = 0$ e $2x - 2y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -1)$ e il punto di coordinate $(8, 8)$ è 9.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(2, 4, 6)$ rispetto al punto $(-2, -4, -6)$ è il punto $(1, 2, 3)$.
   C) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni $x + 2y - 5 = 0$ e $2x + y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$ è $2\sqrt{3}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno la stessa traccia.
   B) A e B coincidono.
   C) A e B sono matrici simili.
   D) A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0,0,0)$, $(0,0,2)$ è il punto $(0,1,0)$.
   B) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 0, y = -2t, z = -2t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2,4)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\frac{5}{\sqrt{2}}$.
   D) se u, v sono due versori ortogonali dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u \wedge v) \wedge v$ è un versore.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = -t$ e $x = 2t-1, y = 1, z = 2t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A^2 \cdot B^2) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.
   B) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   C) esistono almeno due spazi vettoriali reali di dimensione 5 che non sono fra loro isomorfi.
   D) una trasformazione lineare $T : U \to V$ è iniettiva se e solo se manda il vettore nullo di U nel vettore nullo di V.

5) Siano A, B e C tre matrici reali 7×3. Allora
   A) può accadere che ${}^tB \cdot C$ sia una matrice nulla pur essendo B e C non nulle.
   B) se ${}^tA = {}^tB$ allora $A = B$.
   C) per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ si ha che $(\alpha + \beta + \gamma) \cdot (A + B + C) = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$.
   D) $\rho(A) \leq 3$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi privi di unità.
   B) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri razionali è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_{17}$ delle classi di resto modulo 17 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi).
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora il rango della sua matrice completa è massimo.
   B) se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $Sol(\mathbf{S})$ contiene un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$, allora $Sol(\mathbf{S})$ contiene infiniti altri vettori di $\mathbb{R}^n$.
   C) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ ammette, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^5$, un'unica rappresentazione parametrica.
   D) se $\mathbf{S}$ ha tante equazioni quante incognite allora ammette esattamente una soluzione.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue nel punto 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle matrici reali 8×8 diagonali è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_8(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) due qualsiasi basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno la medesima cardinalità.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) nello spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale il quadrato della norma di un vettore v è dato dalla somma dei quadrati delle componenti di v rispetto alla base canonica.
   B) lo spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale ammette una ed una sola base ortonormale.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$.
   D) per ogni $u, v \in V$ le condizioni $\langle u, v \rangle = 0$ e $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$ si equivalgono.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali 7×9. Allora
   A) $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$.
   B) $A \cdot {}^tB \cdot C$ è una matrice 7×9.
   C) $B \cdot (A - C) = B \cdot A - B \cdot C$.
   D) se A ha tre righe uguali deve essere $\rho(A) \leq 5$.

2) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) se le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti allora **S** ammette almeno una soluzione.
   B) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $I\!R^8$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $I\!R^8$, da un (opportuno) sistema lineare di 3 equazioni in 8 incognite.
   C) **S** ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto se e solo **S** ha più equazioni che incognite.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) tutte le matrici reali $n \times n$ simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.
   B) T è diagonalizzabile se e solo la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) t^{n-1} non può essere il polinomio caratteristico $p(t)$ di A.
   D) A è diagonalizzabile per similitudine.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ le condizioni $\langle u, v \rangle = 0$ e $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$ si equivalgono.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$.
   C) nello spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale il quadrato della norma di un vettore v è dato dalla somma dei quadrati delle componenti di v rispetto alla base canonica.
   D) lo spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale ammette una ed una sola base ortonormale.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri negativi, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme delle successioni reali nulle dal decimo termine in poi è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_{4\times4}(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,0,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) tutte le trasformazioni lineari sono invertibili.
   B) se $A \in M_5(\mathbb{R})$ è regolare allora ogni trasformazione avente A come matrice associata è un isomorfismo.
   C) se $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ è una trasformazione lineare allora è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z)$ è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = -t$ e $x = 2t-1, y = 1, z = 2t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due versori ortogonali dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u \wedge v) \wedge v$ è un versore.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2,4)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\frac{5}{\sqrt{2}}$.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0,0,0)$, $(0,0,2)$ è il punto $(0,1,0)$.
   D) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 0, y = -2t, z = -2t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 multiple della matrice identica è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione di unione.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(2,4,6)$ rispetto al punto $(-2,-4,-6)$ è il punto $(1,2,3)$.
   B) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni $x+2y-5=0$ e $2x+y=0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$ è $2\sqrt{3}$.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-1,-1)$ e il punto di coordinate $(8,8)$ è 9.

2) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi).
   A) se **S** ha tante equazioni quante incognite allora ammette esattamente una soluzione.
   B) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ ammette, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^5$, un'unica rappresentazione parametrica.
   C) se **S** è omogeneo e $Sol(\mathbf{S})$ contiene un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$, allora $Sol(\mathbf{S})$ contiene infiniti altri vettori di $\mathbb{R}^n$.
   D) se **S** ammette almeno una soluzione allora il rango della sua matrice completa è massimo.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_{17}$ delle classi di resto modulo 17 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri razionali è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.
   C) esistono gruppi privi di unità.
   D) l'insieme **Z** dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   B) A e B sono matrici simili.
   C) A e B coincidono.
   D) A e B hanno la stessa traccia.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - y = 0$ e $2x - 2y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u \in V$ allora si ha che $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo di V.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   C) se $u \in V$ e $\beta \in \mathbb{R}$ allora $\|\beta u\| = |\beta| \cdot \|u\|$.
   D) una trasformazione lineare $T : V \to W$ si dice ortogonale se si ha $\langle T(u), T(v) \rangle = 0$ per ogni $u, v \in V$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) due qualsiasi basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno la medesima cardinalità.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue nel punto 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 8×8 diagonali è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_8(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano A, B e C tre matrici reali 7×3. Allora
   A) $\rho(A) \leq 3$.
   B) se ${}^tA = {}^tB$ allora $A = B$.
   C) può accadere che ${}^tB \cdot C$ sia una matrice nulla pur essendo B e C non nulle.
   D) per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ si ha che $(\alpha + \beta + \gamma) \cdot (A + B + C) = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) una trasformazione lineare $T : U \to V$ è iniettiva se e solo se manda il vettore nullo di U nel vettore nullo di V.
   B) esistono almeno due spazi vettoriali reali di dimensione 5 che non sono fra loro isomorfi.
   C) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A^2 \cdot B^2) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali 7×3. Allora
   A) $\rho(A) \leq 3$.
   B) può accadere che ${}^tB \ \cdot C$ sia una matrice nulla pur essendo B e C non nulle.
   C) se ${}^tA = \ {}^tB$ allora $A = B$.
   D) per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in I\!R$ si ha che $(\alpha + \beta + \gamma) \cdot (A + B + C) = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) due qualsiasi basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno la medesima cardinalità.
   B) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ continue nel punto 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x = 0, z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle matrici reali 8×8 diagonali è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_8(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - y = 0$ e $2x - 2y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : I\!R^7 \to I\!R^7$ è una trasformazione lineare allora è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   B) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R^2$ definita da $F(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.
   C) tutte le trasformazioni lineari sono invertibili.
   D) se $A \in M_5(I\!R)$ è regolare allora ogni trasformazione avente A come matrice associata è un isomorfismo.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) **S** ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto se e solo **S** ha più equazioni che incognite.
   C) se le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti allora **S** ammette almeno una soluzione.
   D) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $I\!R^8$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $I\!R^8$, da un (opportuno) sistema lineare di 3 equazioni in 8 incognite.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) t^{n-1} non può essere il polinomio caratteristico $p(t)$ di A.
   B) A è diagonalizzabile per similitudine.
   C) tutte le matrici reali $n \times n$ simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.
   D) T è diagonalizzabile se e solo la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u \in V$ allora si ha che $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo di V.
   B) se $u \in V$ e $\beta \in \mathbb{R}$ allora $\|\beta u\| = |\beta| \cdot \|u\|$.
   C) una trasformazione lineare $T : V \to W$ si dice ortogonale se si ha $\langle T(u), T(v) \rangle = 0$ per ogni $u, v \in V$.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(2, 4, 6)$ rispetto al punto $(-2, -4, -6)$ è il punto $(1, 2, 3)$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$ è $2\sqrt{3}$.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -1)$ e il punto di coordinate $(8, 8)$ è 9.
   D) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni $x + 2y - 5 = 0$ e $2x + y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_{17}$ delle classi di resto modulo 17 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) esistono gruppi privi di unità.
   C) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri razionali è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $u,v\in V$ risulta $|\langle u,v\rangle| \le \|u\|^2\cdot\|v\|^2$.
   B) per ogni $u,v\in V$ le condizioni $\langle u,v\rangle=0$ e $\|u\|^2+\|v\|^2=\|u+v\|^2$ si equivalgono.
   C) lo spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale ammette una ed una sola base ortonormale.
   D) nello spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale il quadrato della norma di un vettore v è dato dalla somma dei quadrati delle componenti di v rispetto alla base canonica.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e siano A,B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B coincidono.
   B) A e B hanno la stessa traccia.
   C) A e B sono matrici simili.
   D) A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

3) Siano A, B e C tre matrici reali 7×9. Allora
   A) $B\cdot(A-C)=B\cdot A-B\cdot C$.
   B) se A ha tre righe uguali deve essere $\rho(A)\le 5$.
   C) $A\cdot\ {}^tB\ \cdot C$ è una matrice 7×9.
   D) $\rho(A+B)=\rho(A)+\rho(B)$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione di unione.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 multiple della matrice identica è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x=t, y=0, z=-t$ e $x=2t-1, y=1, z=2t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, 4)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\frac{5}{\sqrt{2}}$.
   B) se u, v sono due versori ortogonali dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u \wedge v) \wedge v$ è un versore.
   C) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 0, y = -2t, z = -2t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 1, 0)$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A^2 \cdot B^2) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.
   C) esistono almeno due spazi vettoriali reali di dimensione 5 che non sono fra loro isomorfi.
   D) una trasformazione lineare $T : U \to V$ è iniettiva se e solo se manda il vettore nullo di U nel vettore nullo di V.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_{4\times4}(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   C) l'insieme delle successioni reali nulle dal decimo termine in poi è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che si annullano su tutti i numeri negativi, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi).
   A) se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $Sol(\mathbf{S})$ contiene un vettore non nullo di $I\!R^n$, allora $Sol(\mathbf{S})$ contiene infiniti altri vettori di $I\!R^n$.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora il rango della sua matrice completa è massimo.
   C) ogni sottospazio vettoriale di $I\!R^5$ ammette, relativamente alla base canonica di $I\!R^5$, un'unica rappresentazione parametrica.
   D) se $\mathbf{S}$ ha tante equazioni quante incognite allora ammette esattamente una soluzione.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali 7×3. Allora
   A) se ${}^tA = {}^tB$ allora $A = B$.
   B) per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in I\!R$ si ha che $(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(A+B+C) = \alpha\cdot A + \beta\cdot B + \gamma\cdot C$.
   C) $\rho(A) \leq 3$.
   D) può accadere che ${}^tB \cdot C$ sia una matrice nulla pur essendo B e C non nulle.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x,y,z) \in I\!R^3 : x = 0, z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle matrici reali 8×8 diagonali è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_8(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   C) due qualsiasi basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno la medesima cardinalità.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ continue nel punto 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : I\!R^7 \to I\!R^7$ è una trasformazione lineare allora è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   B) se $A \in M_5(I\!R)$ è regolare allora ogni trasformazione avente A come matrice associata è un isomorfismo.
   C) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R^2$ definita da $F(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z)$ è una trasformazione lineare.
   D) tutte le trasformazioni lineari sono invertibili.

4) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) **S** ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $I\!R^8$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $I\!R^8$, da un (opportuno) sistema lineare di 3 equazioni in 8 incognite.
   C) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto se e solo **S** ha più equazioni che incognite.
   D) se le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti allora **S** ammette almeno una soluzione.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se u, v sono due versori ortogonali dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u \wedge v) \wedge v$ è un versore.
B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0,0,0)$, $(0,0,2)$ è il punto $(0,1,0)$.
C) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x=-t, y=1, z=-t$ e $x=0, y=-2t, z=-2t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2,4)$ e la retta di equazione $x-y+1=0$ è $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
A) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri razionali è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.
B) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
C) l'insieme $\mathbf{Z}_{17}$ delle classi di resto modulo 17 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
D) esistono gruppi privi di unità.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
A) t^{n-1} non può essere il polinomio caratteristico $p(t)$ di A.
B) T è diagonalizzabile se e solo la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
C) A è diagonalizzabile per similitudine.
D) tutte le matrici reali $n \times n$ simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
A) per ogni $u, v \in V$ le condizioni $\langle u, v \rangle = 0$ e $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u+v\|^2$ si equivalgono.
B) nello spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale il quadrato della norma di un vettore v è dato dalla somma dei quadrati delle componenti di v rispetto alla base canonica.
C) lo spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale ammette una ed una sola base ortonormale.
D) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x=t, y=0, z=-t$ e $x=2t-1, y=1, z=2t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi).
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora il rango della sua matrice completa è massimo.
   B) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ ammette, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^5$, un'unica rappresentazione parametrica.
   C) se $\mathbf{S}$ ha tante equazioni quante incognite allora ammette esattamente una soluzione.
   D) se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $Sol(\mathbf{S})$ contiene un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$, allora $Sol(\mathbf{S})$ contiene infiniti altri vettori di $\mathbb{R}^n$.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - y = 0$ e $2x - 2y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 multiple della matrice identica è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione di unione.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni $x + 2y - 5 = 0$ e $2x + y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(2, 4, 6)$ rispetto al punto $(-2, -4, -6)$ è il punto $(1, 2, 3)$.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -1)$ e il punto di coordinate $(8, 8)$ è 9.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$ è $2\sqrt{3}$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali nulle dal decimo termine in poi è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri negativi, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   D) l'insieme $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,0,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Siano A, B e C tre matrici reali 7×9. Allora
   A) $A \cdot\ {}^tB\ \cdot C$ è una matrice 7×9.
   B) $B \cdot (A - C) = B \cdot A - B \cdot C$.
   C) $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.
   D) se A ha tre righe uguali deve essere $\rho(A) \leq 5$.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno la stessa traccia.
   B) A e B sono matrici simili.
   C) A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   D) A e B coincidono.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A^2 \cdot B^2) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.
   B) esistono almeno due spazi vettoriali reali di dimensione 5 che non sono fra loro isomorfi.
   C) una trasformazione lineare $T : U \to V$ è iniettiva se e solo se manda il vettore nullo di U nel vettore nullo di V.
   D) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2 - A$ è una trasformazione lineare.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   B) se $u \in V$ allora si ha che $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo di V.
   C) una trasformazione lineare $T : V \to W$ si dice ortogonale se si ha $\langle T(u), T(v) \rangle = 0$ per ogni $u, v \in V$.
   D) se $u \in V$ e $\beta \in \mathbb{R}$ allora $\|\beta u\| = |\beta| \cdot \|u\|$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri negativi, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,0,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle successioni reali nulle dal decimo termine in poi è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - y = 0$ e $2x - 2y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(2,4,6)$ rispetto al punto $(-2,-4,-6)$ è il punto $(1,2,3)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-1,-1)$ e il punto di coordinate $(8,8)$ è 9.
   C) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni $x + 2y - 5 = 0$ e $2x + y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$ è $2\sqrt{3}$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) tutte le trasformazioni lineari sono invertibili.
   B) se $A \in M_5(\mathbb{R})$ è regolare allora ogni trasformazione avente A come matrice associata è un isomorfismo.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z)$ è una trasformazione lineare.
   D) se $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ è una trasformazione lineare allora è iniettiva se e solo se è suriettiva.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione.
   B) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^8$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^8$, da un (opportuno) sistema lineare di 3 equazioni in 8 incognite.
   C) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto se e solo $\mathbf{S}$ ha più equazioni che incognite.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) tutte le matrici reali $n \times n$ simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.
   B) T è diagonalizzabile se e solo la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) A è diagonalizzabile per similitudine.
   D) t^{n-1} non può essere il polinomio caratteristico $p(t)$ di A.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u \in V$ allora si ha che $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo di V.
   B) una trasformazione lineare $T : V \to W$ si dice ortogonale se si ha $\langle T(u), T(v) \rangle = 0$ per ogni $u, v \in V$.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   D) se $u \in V$ e $\beta \in \mathbb{R}$ allora $\|\beta u\| = |\beta| \cdot \|u\|$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione di unione.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 multiple della matrice identica è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

9) Siano A, B e C tre matrici reali 7×9. Allora
   A) $B \cdot (A - C) = B \cdot A - B \cdot C$.
   B) $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.
   C) se A ha tre righe uguali deve essere $\rho(A) \leq 5$.
   D) $A \cdot {}^tB \cdot C$ è una matrice 7×9.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = -t$ e $x = 2t-1, y = 1, z = 2t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

2) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$.
   B) lo spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale ammette una ed una sola base ortonormale.
   C) nello spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale il quadrato della norma di un vettore v è dato dalla somma dei quadrati delle componenti di v rispetto alla base canonica.
   D) per ogni $u, v \in V$ le condizioni $\langle u, v\rangle = 0$ e $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$ si equivalgono.

3) Siano A, B e C tre matrici reali 7×3. Allora
   A) per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in I\!R$ si ha che $(\alpha + \beta + \gamma) \cdot (A + B + C) = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$.
   B) può accadere che ${}^tB \cdot C$ sia una matrice nulla pur essendo B e C non nulle.
   C) se ${}^tA = {}^tB$ allora $A = B$.
   D) $\rho(A) \leq 3$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) esistono gruppi privi di unità.
   C) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri razionali è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_{17}$ delle classi di resto modulo 17 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 8×8 diagonali è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_8(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue nel punto 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) due qualsiasi basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno la medesima cardinalità.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B coincidono.
   B) A e B hanno la stessa traccia.
   C) A e B sono matrici simili.
   D) A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi).
   A) se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $Sol(\mathbf{S})$ contiene un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$, allora $Sol(\mathbf{S})$ contiene infiniti altri vettori di $\mathbb{R}^n$.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora il rango della sua matrice completa è massimo.
   C) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ ammette, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^5$, un'unica rappresentazione parametrica.
   D) se $\mathbf{S}$ ha tante equazioni quante incognite allora ammette esattamente una soluzione.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A^2 \cdot B^2) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.
   C) esistono almeno due spazi vettoriali reali di dimensione 5 che non sono fra loro isomorfi.
   D) una trasformazione lineare $T : U \to V$ è iniettiva se e solo se manda il vettore nullo di U nel vettore nullo di V.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, 4)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\frac{5}{\sqrt{2}}$.
   B) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 0, y = -2t, z = -2t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 1, 0)$.
   D) se u, v sono due versori ortogonali dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u \wedge v) \wedge v$ è un versore.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) tutte le trasformazioni lineari sono invertibili.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (x+y+z, x+y+z)$ è una trasformazione lineare.
   C) se $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ è una trasformazione lineare allora è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   D) se $A \in M_5(\mathbb{R})$ è regolare allora ogni trasformazione avente A come matrice associata è un isomorfismo.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) tutte le matrici reali $n \times n$ simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.
   B) A è diagonalizzabile per similitudine.
   C) t^{n-1} non può essere il polinomio caratteristico $p(t)$ di A.
   D) T è diagonalizzabile se e solo la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ le condizioni $\langle u, v \rangle = 0$ e $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$ si equivalgono.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| \le \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$.
   C) lo spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale ammette una ed una sola base ortonormale.
   D) nello spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale il quadrato della norma di un vettore v è dato dalla somma dei quadrati delle componenti di v rispetto alla base canonica.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione.
   B) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto se e solo $\mathbf{S}$ ha più equazioni che incognite.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^8$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^8$, da un (opportuno) sistema lineare di 3 equazioni in 8 incognite.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = -t$ e $x = 2t-1, y = 1, z = 2t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due versori ortogonali dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u \wedge v) \wedge v$ è un versore.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, 4)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\frac{5}{\sqrt{2}}$.
   C) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 0, y = -2t, z = -2t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 1, 0)$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione di unione.
   C) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 multiple della matrice identica è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

8) Siano A, B e C tre matrici reali 7×9. Allora
   A) $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.
   B) se A ha tre righe uguali deve essere $\rho(A) \leq 5$.
   C) $B \cdot (A - C) = B \cdot A - B \cdot C$.
   D) $A \cdot {}^tB \cdot C$ è una matrice 7×9.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri negativi, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle successioni reali nulle dal decimo termine in poi è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali 7×3. Allora
   A) se ${}^tA = {}^tB$ allora $A = B$.
   B) per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in I\!R$ si ha che $(\alpha + \beta + \gamma) \cdot (A + B + C) = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$.
   C) può accadere che ${}^tB \cdot C$ sia una matrice nulla pur essendo B e C non nulle.
   D) $\rho(A) \leq 3$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B coincidono.
   B) A e B hanno la stessa traccia.
   C) A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   D) A e B sono matrici simili.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u \in V$ allora si ha che $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo di V.
   B) una trasformazione lineare $T : V \to W$ si dice ortogonale se si ha $\langle T(u), T(v) \rangle = 0$ per ogni $u, v \in V$.
   C) se $u \in V$ e $\beta \in I\!R$ allora $\|\beta u\| = |\beta| \cdot \|u\|$.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x = 0, z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle matrici reali 8×8 diagonali è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_8(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ continue nel punto 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) due qualsiasi basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno la medesima cardinalità.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri razionali è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) esistono gruppi privi di unità.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_{17}$ delle classi di resto modulo 17 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x-y=0$ e $2x-2y=3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi).
   A) se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $Sol(\mathbf{S})$ contiene un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$, allora $Sol(\mathbf{S})$ contiene infiniti altri vettori di $\mathbb{R}^n$.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora il rango della sua matrice completa è massimo.
   C) se $\mathbf{S}$ ha tante equazioni quante incognite allora ammette esattamente una soluzione.
   D) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ ammette, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^5$, un'unica rappresentazione parametrica.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A^2 \cdot B^2) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.
   C) una trasformazione lineare $T: U \to V$ è iniettiva se e solo se manda il vettore nullo di U nel vettore nullo di V.
   D) esistono almeno due spazi vettoriali reali di dimensione 5 che non sono fra loro isomorfi.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(2,4,6)$ rispetto al punto $(-2,-4,-6)$ è il punto $(1,2,3)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-1,-1)$ e il punto di coordinate $(8,8)$ è 9.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$ è $2\sqrt{3}$.
   D) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni $x+2y-5=0$ e $2x+y=0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ continue nel punto 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) due qualsiasi basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno la medesima cardinalità.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x = 0, z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle matrici reali 8×8 diagonali è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_8(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A \in M_5(I\!R)$ è regolare allora ogni trasformazione avente A come matrice associata è un isomorfismo.
   B) tutte le trasformazioni lineari sono invertibili.
   C) se $T : I\!R^7 \to I\!R^7$ è una trasformazione lineare allora è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   D) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R^2$ definita da $F(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.

3) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $I\!R^8$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $I\!R^8$, da un (opportuno) sistema lineare di 3 equazioni in 8 incognite.
   B) se le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti allora **S** ammette almeno una soluzione.
   C) **S** ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto se e solo **S** ha più equazioni che incognite.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T è diagonalizzabile se e solo la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) tutte le matrici reali $n \times n$ simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.
   C) t^{n-1} non può essere il polinomio caratteristico $p(t)$ di A.
   D) A è diagonalizzabile per similitudine.

5) Siano A, B e C tre matrici reali 7×3. Allora
   A) può accadere che ${}^tB \cdot C$ sia una matrice nulla pur essendo B e C non nulle.
   B) $\rho(A) \leq 3$.
   C) se ${}^tA = {}^tB$ allora $A = B$.
   D) per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in I\!R$ si ha che $(\alpha + \beta + \gamma) \cdot (A + B + C) = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - y = 0$ e $2x - 2y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni $x + 2y - 5 = 0$ e $2x + y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(2, 4, 6)$ rispetto al punto $(-2, -4, -6)$ è il punto $(1, 2, 3)$.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -1)$ e il punto di coordinate $(8, 8)$ è 9.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$ è $2\sqrt{3}$.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   B) se $u \in V$ allora si ha che $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo di V.
   C) una trasformazione lineare $T : V \to W$ si dice ortogonale se si ha $\langle T(u), T(v) \rangle = 0$ per ogni $u, v \in V$.
   D) se $u \in V$ e $\beta \in I\!R$ allora $\|\beta u\| = |\beta| \cdot \|u\|$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi privi di unità.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_{17}$ delle classi di resto modulo 17 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri razionali è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = -t$ e $x = 2t-1, y = 1, z = 2t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ le condizioni $\langle u, v \rangle = 0$ e $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$ si equivalgono.
   B) lo spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale ammette una ed una sola base ortonormale.
   C) nello spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale il quadrato della norma di un vettore v è dato dalla somma dei quadrati delle componenti di v rispetto alla base canonica.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali 7×9. Allora
   A) se A ha tre righe uguali deve essere $\rho(A) \leq 5$.
   B) $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.
   C) $B \cdot (A - C) = B \cdot A - B \cdot C$.
   D) $A \cdot {}^tB \cdot C$ è una matrice 7×9.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione di unione.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 multiple della matrice identica è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) una trasformazione lineare $T : U \to V$ è iniettiva se e solo se manda il vettore nullo di U nel vettore nullo di V.
   B) esistono almeno due spazi vettoriali reali di dimensione 5 che non sono fra loro isomorfi.
   C) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A^2 \cdot B^2) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,0,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri negativi, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle successioni reali nulle dal decimo termine in poi è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due versori ortogonali dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u \wedge v) \wedge v$ è un versore.
   B) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 0, y = -2t, z = -2t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0,0,0)$, $(0,0,2)$ è il punto $(0,1,0)$.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2,4)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

8) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi).
   A) se **S** ha tante equazioni quante incognite allora ammette esattamente una soluzione.
   B) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ ammette, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^5$, un'unica rappresentazione parametrica.
   C) se **S** è omogeneo e $Sol(\mathbf{S})$ contiene un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$, allora $Sol(\mathbf{S})$ contiene infiniti altri vettori di $\mathbb{R}^n$.
   D) se **S** ammette almeno una soluzione allora il rango della sua matrice completa è massimo.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   B) A e B sono matrici simili.
   C) A e B coincidono.
   D) A e B hanno la stessa traccia.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ è una trasformazione lineare allora è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   B) se $A \in M_5(\mathbb{R})$ è regolare allora ogni trasformazione avente A come matrice associata è un isomorfismo.
   C) tutte le trasformazioni lineari sono invertibili.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.

2) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$.
   B) per ogni $u, v \in V$ le condizioni $\langle u, v\rangle = 0$ e $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$ si equivalgono.
   C) nello spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale il quadrato della norma di un vettore v è dato dalla somma dei quadrati delle componenti di v rispetto alla base canonica.
   D) lo spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale ammette una ed una sola base ortonormale.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^8$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^8$, da un (opportuno) sistema lineare di 3 equazioni in 8 incognite.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione.
   D) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto se e solo $\mathbf{S}$ ha più equazioni che incognite.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = -t$ e $x = 2t-1, y = 1, z = 2t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, 4)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\frac{5}{\sqrt{2}}$.
   B) se u, v sono due versori ortogonali dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u \wedge v) \wedge v$ è un versore.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 1, 0)$.
   D) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 0, y = -2t, z = -2t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) t^{n-1} non può essere il polinomio caratteristico $p(t)$ di A.
   B) T è diagonalizzabile se e solo la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) tutte le matrici reali $n \times n$ simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.
   D) A è diagonalizzabile per similitudine.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_{17}$ delle classi di resto modulo 17 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) esistono gruppi privi di unità.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri razionali è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.

8) Siano A, B e C tre matrici reali 7×3. Allora
   A) $\rho(A) \leq 3$.
   B) può accadere che ${}^tB \cdot C$ sia una matrice nulla pur essendo B e C non nulle.
   C) per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in I\!R$ si ha che $(\alpha + \beta + \gamma) \cdot (A + B + C) = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$.
   D) se ${}^tA = {}^tB$ allora $A = B$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) due qualsiasi basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno la medesima cardinalità.
   B) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ continue nel punto 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 8×8 diagonali è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_8(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x = 0, z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 multiple della matrice identica è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione di unione.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   B) A e B coincidono.
   C) A e B sono matrici simili.
   D) A e B hanno la stessa traccia.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri negativi, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_{4\times4}(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle successioni reali nulle dal decimo termine in poi è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

4) Siano A, B e C tre matrici reali 7×9. Allora
   A) $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.
   B) $B \cdot (A - C) = B \cdot A - B \cdot C$.
   C) $A \cdot {}^tB \cdot C$ è una matrice 7×9.
   D) se A ha tre righe uguali deve essere $\rho(A) \leq 5$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi).
   A) se $\mathbf{S}$ ha tante equazioni quante incognite allora ammette esattamente una soluzione.
   B) se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $Sol(\mathbf{S})$ contiene un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$, allora $Sol(\mathbf{S})$ contiene infiniti altri vettori di $\mathbb{R}^n$.
   C) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ ammette, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^5$, un'unica rappresentazione parametrica.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora il rango della sua matrice completa è massimo.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) una trasformazione lineare $T : U \to V$ è iniettiva se e solo se manda il vettore nullo di U nel vettore nullo di V.
   B) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   C) esistono almeno due spazi vettoriali reali di dimensione 5 che non sono fra loro isomorfi.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A^2 \cdot B^2) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u \in V$ e $\beta \in \mathbb{R}$ allora $\|\beta u\| = |\beta| \cdot \|u\|$.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   C) se $u \in V$ allora si ha che $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo di V.
   D) una trasformazione lineare $T : V \to W$ si dice ortogonale se si ha $\langle T(u), T(v) \rangle = 0$ per ogni $u, v \in V$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$ è $2\sqrt{3}$.
   B) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni $x + 2y - 5 = 0$ e $2x + y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   C) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(2, 4, 6)$ rispetto al punto $(-2, -4, -6)$ è il punto $(1, 2, 3)$.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -1)$ e il punto di coordinate $(8, 8)$ è 9.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - y = 0$ e $2x - 2y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - y = 0$ e $2x - 2y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(2, 4, 6)$ rispetto al punto $(-2, -4, -6)$ è il punto $(1, 2, 3)$.
   B) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni $x + 2y - 5 = 0$ e $2x + y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -1)$ e il punto di coordinate $(8, 8)$ è 9.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$ è $2\sqrt{3}$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_{4\times4}(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri negativi, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle successioni reali nulle dal decimo termine in poi è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) A è diagonalizzabile per similitudine.
   B) T è diagonalizzabile se e solo la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) t^{n-1} non può essere il polinomio caratteristico $p(t)$ di A.
   D) tutte le matrici reali $n \times n$ simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

5) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se $u \in V$ allora si ha che $\langle u, u\rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo di V.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   C) una trasformazione lineare $T : V \to W$ si dice ortogonale se si ha $\langle T(u), T(v)\rangle = 0$ per ogni $u, v \in V$.
   D) se $u \in V$ e $\beta \in I\!R$ allora $\|\beta u\| = |\beta| \cdot \|u\|$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione di unione.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 multiple della matrice identica è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

7) Siano A, B e C tre matrici reali 7×9. Allora
   A) $B \cdot (A - C) = B \cdot A - B \cdot C$.
   B) $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.
   C) se A ha tre righe uguali deve essere $\rho(A) \leq 5$.
   D) $A \cdot {}^tB \cdot C$ è una matrice 7×9.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R^2$ definita da $F(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A \in M_5(I\!R)$ è regolare allora ogni trasformazione avente A come matrice associata è un isomorfismo.
   C) se $T : I\!R^7 \to I\!R^7$ è una trasformazione lineare allora è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   D) tutte le trasformazioni lineari sono invertibili.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto se e solo $\mathbf{S}$ ha più equazioni che incognite.
   B) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $I\!R^8$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $I\!R^8$, da un (opportuno) sistema lineare di 3 equazioni in 8 incognite.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) esistono almeno due spazi vettoriali reali di dimensione 5 che non sono fra loro isomorfi.
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A^2 \cdot B^2) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.
   C) una trasformazione lineare $T : U \to V$ è iniettiva se e solo se manda il vettore nullo di U nel vettore nullo di V.
   D) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2 - A$ è una trasformazione lineare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi privi di unità.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_{17}$ delle classi di resto modulo 17 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri razionali è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B sono matrici simili.
   B) A e B hanno la stessa traccia.
   C) A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   D) A e B coincidono.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 0, y = -2t, z = -2t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   B) se u, v sono due versori ortogonali dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u \wedge v) \wedge v$ è un versore.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, 4)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\frac{5}{\sqrt{2}}$.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 1, 0)$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ continue nel punto 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) due qualsiasi basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno la medesima cardinalità.
   C) l'insieme delle matrici reali 8×8 diagonali è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_8(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x = 0, z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

6) Siano A, B e C tre matrici reali 7×3. Allora
   A) può accadere che ${}^tB \cdot C$ sia una matrice nulla pur essendo B e C non nulle.
   B) $\rho(A) \leq 3$.
   C) per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in I\!R$ si ha che $(\alpha + \beta + \gamma) \cdot (A + B + C) = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$.
   D) se ${}^tA = {}^tB$ allora $A = B$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) lo spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale ammette una ed una sola base ortonormale.
   B) per ogni $u, v \in V$ le condizioni $\langle u, v \rangle = 0$ e $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$ si equivalgono.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$.
   D) nello spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale il quadrato della norma di un vettore v è dato dalla somma dei quadrati delle componenti di v rispetto alla base canonica.

8) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi).
   A) ogni sottospazio vettoriale di $I\!R^5$ ammette, relativamente alla base canonica di $I\!R^5$, un'unica rappresentazione parametrica.
   B) se **S** ammette almeno una soluzione allora il rango della sua matrice completa è massimo.
   C) se **S** ha tante equazioni quante incognite allora ammette esattamente una soluzione.
   D) se **S** è omogeneo e $Sol(\mathbf{S})$ contiene un vettore non nullo di $I\!R^n$, allora $Sol(\mathbf{S})$ contiene infiniti altri vettori di $I\!R^n$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = -t$ e $x = 2t-1, y = 1, z = 2t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : I\!R^7 \to I\!R^7$ è una trasformazione lineare allora è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   B) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R^2$ definita da $F(x, y, z) = (x+y+z, x+y+z)$ è una trasformazione lineare.
   C) se $A \in M_5(I\!R)$ è regolare allora ogni trasformazione avente A come matrice associata è un isomorfismo.
   D) tutte le trasformazioni lineari sono invertibili.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto se e solo $\mathbf{S}$ ha più equazioni che incognite.
   C) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $I\!R^8$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $I\!R^8$, da un (opportuno) sistema lineare di 3 equazioni in 8 incognite.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = -t$ e $x = 2t-1, y = 1, z = 2t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due versori ortogonali dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u \wedge v) \wedge v$ è un versore.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, 4)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\frac{5}{\sqrt{2}}$.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 1, 0)$.
   D) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 0, y = -2t, z = -2t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.

5) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) t^{n-1} non può essere il polinomio caratteristico $p(t)$ di A.
   B) A è diagonalizzabile per similitudine.
   C) T è diagonalizzabile se e solo la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) tutte le matrici reali $n \times n$ simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ le condizioni $\langle u, v \rangle = 0$ e $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$ si equivalgono.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$.
   C) nello spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale il quadrato della norma di un vettore v è dato dalla somma dei quadrati delle componenti di v rispetto alla base canonica.
   D) lo spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale ammette una ed una sola base ortonormale.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione di unione.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 multiple della matrice identica è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

8) Siano A, B e C tre matrici reali 7×9. Allora
   A) $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.
   B) se A ha tre righe uguali deve essere $\rho(A) \leq 5$.
   C) $A \cdot {}^tB \cdot C$ è una matrice 7×9.
   D) $B \cdot (A - C) = B \cdot A - B \cdot C$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri negativi, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle successioni reali nulle dal decimo termine in poi è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_{4\times4}(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali 7×3. Allora
   A) per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ si ha che $(\alpha+\beta+\gamma) \cdot (A+B+C) = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$.
   B) $\rho(A) \leq 3$.
   C) se ${}^tA = {}^tB$ allora $A = B$.
   D) può accadere che ${}^tB \cdot C$ sia una matrice nulla pur essendo B e C non nulle.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_{17}$ delle classi di resto modulo 17 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri razionali è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.
   D) esistono gruppi privi di unità.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 8×8 diagonali è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_8(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) due qualsiasi basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno la medesima cardinalità.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue nel punto 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u \in V$ allora si ha che $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo di V.
   B) una trasformazione lineare $T : V \to W$ si dice ortogonale se si ha $\langle T(u), T(v) \rangle = 0$ per ogni $u, v \in V$.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   D) se $u \in V$ e $\beta \in \mathbb{R}$ allora $\|\beta u\| = |\beta| \cdot \|u\|$.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi).
   A) se **S** ha tante equazioni quante incognite allora ammette esattamente una soluzione.
   B) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ ammette, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^5$, un'unica rappresentazione parametrica.
   C) se **S** è omogeneo e $Sol(\mathbf{S})$ contiene un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$, allora $Sol(\mathbf{S})$ contiene infiniti altri vettori di $\mathbb{R}^n$.
   D) se **S** ammette almeno una soluzione allora il rango della sua matrice completa è massimo.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) una trasformazione lineare $T : U \to V$ è iniettiva se e solo se manda il vettore nullo di U nel vettore nullo di V.
   B) esistono almeno due spazi vettoriali reali di dimensione 5 che non sono fra loro isomorfi.
   C) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A^2 \cdot B^2) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - y = 0$ e $2x - 2y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(2, 4, 6)$ rispetto al punto $(-2, -4, -6)$ è il punto $(1, 2, 3)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -1)$ e il punto di coordinate $(8, 8)$ è 9.
   C) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni $x + 2y - 5 = 0$ e $2x + y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$ è $2\sqrt{3}$.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   B) A e B sono matrici simili.
   C) A e B coincidono.
   D) A e B hanno la stessa traccia.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto se e solo $\mathbf{S}$ ha più equazioni che incognite.
   C) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^8$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^8$, da un (opportuno) sistema lineare di 3 equazioni in 8 incognite.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) t^{n-1} non può essere il polinomio caratteristico $p(t)$ di A.
   B) A è diagonalizzabile per similitudine.
   C) T è diagonalizzabile se e solo la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) tutte le matrici reali $n \times n$ simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u \in V$ allora si ha che $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo di V.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   C) se $u \in V$ e $\beta \in \mathbb{R}$ allora $\|\beta u\| = |\beta| \cdot \|u\|$.
   D) una trasformazione lineare $T : V \to W$ si dice ortogonale se si ha $\langle T(u), T(v) \rangle = 0$ per ogni $u, v \in V$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri razionali è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) esistono gruppi privi di unità.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_{17}$ delle classi di resto modulo 17 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - y = 0$ e $2x - 2y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(2, 4, 6)$ rispetto al punto $(-2, -4, -6)$ è il punto $(1, 2, 3)$.
   B) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni $x + 2y - 5 = 0$ e $2x + y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$ è $2\sqrt{3}$.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -1)$ e il punto di coordinate $(8, 8)$ è 9.

7) Siano A, B e C tre matrici reali 7×3. Allora
   A) se ${}^tA = {}^tB$ allora $A = B$.
   B) per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in I\!\!R$ si ha che $(\alpha + \beta + \gamma) \cdot (A + B + C) = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$.
   C) può accadere che ${}^tB \cdot C$ sia una matrice nulla pur essendo B e C non nulle.
   D) $\rho(A) \leq 3$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!\!R^3 : x = 0, z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle matrici reali 8×8 diagonali è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_8(I\!\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!\!R$ in $I\!\!R$ continue nel punto 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) due qualsiasi basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno la medesima cardinalità.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : I\!\!R^7 \to I\!\!R^7$ è una trasformazione lineare allora è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   B) la funzione $F : I\!\!R^3 \to I\!\!R^2$ definita da $F(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.
   C) se $A \in M_5(I\!\!R)$ è regolare allora ogni trasformazione avente A come matrice associata è un isomorfismo.
   D) tutte le trasformazioni lineari sono invertibili.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali 7×9. Allora
   A) $B \cdot (A - C) = B \cdot A - B \cdot C$.
   B) $A \cdot {}^tB \cdot C$ è una matrice 7×9.
   C) se A ha tre righe uguali deve essere $\rho(A) \leq 5$.
   D) $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 multiple della matrice identica è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione di unione.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) esistono almeno due spazi vettoriali reali di dimensione 5 che non sono fra loro isomorfi.
   B) una trasformazione lineare $T : U \to V$ è iniettiva se e solo se manda il vettore nullo di U nel vettore nullo di V.
   C) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A^2 \cdot B^2) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.
   D) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2 - A$ è una trasformazione lineare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_{4\times4}(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle successioni reali nulle dal decimo termine in poi è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri negativi, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = -t$ e $x = 2t-1, y = 1, z = 2t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$.
   B) lo spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale ammette una ed una sola base ortonormale.
   C) per ogni $u, v \in V$ le condizioni $\langle u, v \rangle = 0$ e $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$ si equivalgono.
   D) nello spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale il quadrato della norma di un vettore v è dato dalla somma dei quadrati delle componenti di v rispetto alla base canonica.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B sono matrici simili.
   B) A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   C) A e B hanno la stessa traccia.
   D) A e B coincidono.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, 4)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\frac{5}{\sqrt{2}}$.
   B) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 0, y = -2t, z = -2t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   C) se u, v sono due versori ortogonali dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u \wedge v) \wedge v$ è un versore.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 1, 0)$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi).
   A) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ ammette, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^5$, un'unica rappresentazione parametrica.
   B) se $\mathbf{S}$ ha tante equazioni quante incognite allora ammette esattamente una soluzione.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora il rango della sua matrice completa è massimo.
   D) se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $Sol(\mathbf{S})$ contiene un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$, allora $Sol(\mathbf{S})$ contiene infiniti altri vettori di $\mathbb{R}^n$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) lo spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale ammette una ed una sola base ortonormale.
   B) per ogni $u, v \in V$ le condizioni $\langle u, v \rangle = 0$ e $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$ si equivalgono.
   C) nello spazio vettoriale euclideo standard tridimensionale il quadrato della norma di un vettore v è dato dalla somma dei quadrati delle componenti di v rispetto alla base canonica.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A \in M_5(\mathbb{R})$ è regolare allora ogni trasformazione avente A come matrice associata è un isomorfismo.
   B) se $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ è una trasformazione lineare allora è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z)$ è una trasformazione lineare.
   D) tutte le trasformazioni lineari sono invertibili.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $\mathbb{R}^8$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^8$, da un (opportuno) sistema lineare di 3 equazioni in 8 incognite.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   C) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto se e solo $\mathbf{S}$ ha più equazioni che incognite.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 0, y = -2t, z = -2t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   B) se u, v sono due versori ortogonali dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u \wedge v) \wedge v$ è un versore.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 1, 0)$.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, 4)$ e la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ è $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi privi di unità.
   B) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri razionali è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_{17}$ delle classi di resto modulo 17 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

6) Siano A, B e C tre matrici reali 7×3. Allora
   A) può accadere che ${}^tB \cdot C$ sia una matrice nulla pur essendo B e C non nulle.
   B) se ${}^tA = {}^tB$ allora $A = B$.
   C) $\rho(A) \leq 3$.
   D) per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in I\!\!R$ si ha che $(\alpha + \beta + \gamma) \cdot (A + B + C) = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!\!R$ in $I\!\!R$ continue nel punto 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!\!R^3 : x = 0, z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) due qualsiasi basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno la medesima cardinalità.
   D) l'insieme delle matrici reali 8×8 diagonali è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_8(I\!\!R)$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = -t$ e $x = 2t-1, y = 1, z = 2t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T è diagonalizzabile se e solo la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) t^{n-1} non può essere il polinomio caratteristico $p(t)$ di A.
   C) A è diagonalizzabile per similitudine.
   D) tutte le matrici reali $n \times n$ simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) una trasformazione lineare $T : V \to W$ si dice ortogonale se si ha $\langle T(u), T(v) \rangle = 0$ per ogni $u, v \in V$.
   B) se $u \in V$ e $\beta \in I\!R$ allora $\|\beta u\| = |\beta| \cdot \|u\|$.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   D) se $u \in V$ allora si ha che $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo di V.

2) Siano A, B e C tre matrici reali 7×9. Allora
   A) se A ha tre righe uguali deve essere $\rho(A) \leq 5$.
   B) $B \cdot (A - C) = B \cdot A - B \cdot C$.
   C) $A \cdot {}^tB \cdot C$ è una matrice 7×9.
   D) $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_{4\times 4}(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle successioni reali nulle dal decimo termine in poi è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che si annullano su tutti i numeri negativi, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x - y = 0$ e $2x - 2y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi).
   A) ogni sottospazio vettoriale di $I\!R^5$ ammette, relativamente alla base canonica di $I\!R^5$, un'unica rappresentazione parametrica.
   B) se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $Sol(\mathbf{S})$ contiene un vettore non nullo di $I\!R^n$, allora $Sol(\mathbf{S})$ contiene infiniti altri vettori di $I\!R^n$.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora il rango della sua matrice completa è massimo.
   D) se $\mathbf{S}$ ha tante equazioni quante incognite allora ammette esattamente una soluzione.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) esistono almeno due spazi vettoriali reali di dimensione 5 che non sono fra loro isomorfi.
   B) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   C) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A^2 \cdot B^2) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.
   D) una trasformazione lineare $T : U \to V$ è iniettiva se e solo se manda il vettore nullo di U nel vettore nullo di V.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B sono matrici simili.
   B) A e B coincidono.
   C) A e B hanno la stessa traccia.
   D) A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -1)$ e il punto di coordinate $(8, 8)$ è 9.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$ è $2\sqrt{3}$.
   C) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni $x + 2y - 5 = 0$ e $2x + y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(2, 4, 6)$ rispetto al punto $(-2, -4, -6)$ è il punto $(1, 2, 3)$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione di unione.
   B) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 multiple della matrice identica è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.