Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme dei numeri complessi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
 - B) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali nella indeterminata t è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - C) nell'insieme delle matrici reali $n \times n$ la matrice identica $n \times n$ è l'unità rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
 - D) ogni struttura algebrica con due operazioni è un anello.

- 2) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora
 - A) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari T_1 e T_2 .
 - B) $\det(B \cdot A) = \det A \cdot \det B$.
 - C) A è invertibile se e solo se la trasposta di A è invertibile.
 - D) se $A + B = \mathbf{0}$ e A è ortogonale allora anche B è ortogonale.

- 3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme delle terne (x, y, z) di numeri reali con $x = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ monotone crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - C) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 3)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
 - D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

- 4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
 - A) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni polinomio il suo termine costante è una trasformazione lineare.
 - B) se $S, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 0$) sono due trasformazioni lineari invertibili allora anche $S + T$ è invertibile.
 - C) l'applicazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che manda ogni vettore (x, y) in $(2y, 3x)$ è un endomorfismo.
 - D) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S^{-1} \circ T^{-1}$ è un automorfismo sullo stesso spazio.

- 5) Un sistema lineare di n equazioni in $n + 1$ incognite ($n > 0$)
- A) è necessariamente privo di soluzioni.
 - B) ha sempre infinite soluzioni.
 - C) può essere privo di soluzioni.
 - D) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
- 6) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^7$.
- A) Se a è una radice di $p(t)$ allora a è un autovalore di T .
 - B) Se a è un autovalore di T allora a è una radice di $p(t)$.
 - C) T ammette almeno un autovalore reale.
 - D) Il grado di $p(t)$ può essere strettamente inferiore a 7.
- 7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
- A) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$.
 - B) se $T : V \rightarrow V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{100} .
 - C) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{u} \rangle \geq 0$.
 - D) $((1, 1), (0, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
- 8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x = y - z$ e $x = y + z + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
- A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
- 9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
 - B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $3x - 3y + 3z = 6$ è uguale a 1.
 - C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(2, 0)$, $(4, -3)$, $(8, -1)$, $(10, -4)$ è uguale a 16.
 - D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(-x, -y, z)$ è una isometria.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^{10}$. Allora:
 - A) se $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ per un certo $\mathbf{v}$ non nullo allora $p(-1) = 0$.
 - B) $p(t)$ ammette necessariamente 10 radici distinte.
 - C) $p(t)$ non può essere un polinomio costante.
 - D) il polinomio caratteristico di $2T$ è $2p(t)$.
- 2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
 - A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(2, -1, 4)$, $(5, -4, 7)$, $(8, -7, 10)$ sono allineati.
 - B) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(1, -1, -1)$, $(1, 2, 2)$, $(-2, 2, -1)$, $(-2, -1, 2)$ è 9.
 - C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 7$ e $x = 11 + t, y = -t, z = 2$ è nullo.
 - D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e la retta di equazione $12x - 5y = 4$ è uguale a 1.
- 3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = t$ e $x = t, y = 3s, z = 3s + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
 - A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
- 4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
 - A) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(1, 1, 1, 1)$ è una trasformazione lineare.
 - B) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero $p(1)$ è una trasformazione lineare.
 - C) la differenza di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
 - D) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^8$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
 - A) se A è triangolare ed ha uno zero sulla diagonale principale allora $\det A = 0$.
 - B) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^{100} \cdot B^{100} = (A \cdot B)^{100}$.
 - C) se A, B e C sono invertibili allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
 - D) $A + B + C = C + B + A$.

- 6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
 - B) l'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
 - C) l'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - D) l'insieme delle classi di resto modulo 4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 4.
- 7) Un sistema lineare di $3n$ equazioni in n incognite ($n > 0$)
- A) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
 - B) è necessariamente privo di soluzioni.
 - C) ha esattamente $2n$ soluzioni.
 - D) può essere privo di soluzioni.
- 8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y > z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
 - C) l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - D) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ che hanno traccia positiva è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
- 9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
- A) se $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ sono vettori non nulli di V e $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V .
 - B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \| \mathbf{v} \| \cdot \| \mathbf{u} \|$.
 - C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \| \mathbf{u} \|^2 - \| \mathbf{v} \|^2$.
 - D) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora
 - A) se $A + B = \mathbf{0}$ e A è ortogonale allora anche B è ortogonale.
 - B) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari T_1 e T_2 .
 - C) $\det(B \cdot A) = \det A \cdot \det B$.
 - D) A è invertibile se e solo se la trasposta di A è invertibile.

- 2) Un sistema lineare di n equazioni in $n + 1$ incognite ($n > 0$)
 - A) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
 - B) può essere privo di soluzioni.
 - C) ha sempre infinite soluzioni.
 - D) è necessariamente privo di soluzioni.

- 3) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^7$.
 - A) Il grado di $p(t)$ può essere strettamente inferiore a 7.
 - B) T ammette almeno un autovalore reale.
 - C) Se a è un autovalore di T allora a è una radice di $p(t)$.
 - D) Se a è una radice di $p(t)$ allora a è un autovalore di T .

- 4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
 - A) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
 - B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$.
 - C) se $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ sono vettori non nulli di V e $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V .
 - D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{u}\|$.

- 5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - B) l'insieme delle terne (x, y, z) di numeri reali con $x = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ monotone crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - D) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 3)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

- 6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
- A) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S^{-1} \circ T^{-1}$ è un automorfismo sullo stesso spazio.
 - B) l'applicazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che manda ogni vettore (x, y) in $(2y, 3x)$ è un endomorfismo.
 - C) se $S, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 0$) sono due trasformazioni lineari invertibili allora anche $S + T$ è invertibile.
 - D) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni polinomio il suo termine costante è una trasformazione lineare.
- 7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = t$ e $x = t, y = 3s, z = 3s + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
- A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
- 8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e la retta di equazione $12x - 5y = 4$ è uguale a 1.
 - B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 7$ e $x = 11 + t, y = -t, z = 2$ è nullo.
 - C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(2, -1, 4)$, $(5, -4, 7)$, $(8, -7, 10)$ sono allineati.
 - D) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(1, -1, -1)$, $(1, 2, 2)$, $(-2, 2, -1)$, $(-2, -1, 2)$ è 9.
- 9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) ogni struttura algebrica con due operazioni è un anello.
 - B) l'insieme dei numeri complessi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
 - C) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali nella indeterminata t è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - D) nell'insieme delle matrici reali $n \times n$ la matrice identica $n \times n$ è l'unità rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
 - A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $3x - 3y + 3z = 6$ è uguale a 1.
 - B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(2, 0)$, $(4, -3)$, $(8, -1)$, $(10, -4)$ è uguale a 16.
 - C) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(-x, -y, z)$ è una isometria.
 - D) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
- 2) Un sistema lineare di $3n$ equazioni in n incognite ($n > 0$)
 - A) può essere privo di soluzioni.
 - B) ha esattamente $2n$ soluzioni.
 - C) è necessariamente privo di soluzioni.
 - D) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
- 3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme delle classi di resto modulo 4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 4.
 - B) l'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
 - C) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
 - D) l'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- 4) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^{10}$. Allora:
 - A) il polinomio caratteristico di $2T$ è $2p(t)$.
 - B) $p(t)$ non può essere un polinomio costante.
 - C) $p(t)$ ammette necessariamente 10 radici distinte.
 - D) se $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ per un certo $\mathbf{v}$ non nullo allora $p(-1) = 0$.
- 5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x = y - z$ e $x = y + z + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
 - A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

- 6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
- A) se $T : V \rightarrow V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{100} .
 - B) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{u} \rangle \geq 0$.
 - C) $((1, 1), (0, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
 - D) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$.
- 7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ che hanno traccia positiva è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
 - B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y > z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
 - C) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - D) l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
- A) $A + B + C = C + B + A$.
 - B) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^{100} \cdot B^{100} = (A \cdot B)^{100}$.
 - C) se A è triangolare ed ha uno zero sulla diagonale principale allora $\det A = 0$.
 - D) se A, B e C sono invertibili allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
- 9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
- A) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^8$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - B) la differenza di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
 - C) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero $p(1)$ è una trasformazione lineare.
 - D) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(1, 1, 1, 1)$ è una trasformazione lineare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Siano A , B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
 - A) $A + B + C = C + B + A$.
 - B) se A è triangolare ed ha uno zero sulla diagonale principale allora $\det A = 0$.
 - C) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^{100} \cdot B^{100} = (A \cdot B)^{100}$.
 - D) se A , B e C sono invertibili allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.

- 2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ che hanno traccia positiva è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
 - B) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y > z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
 - D) l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- 3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x = y - z$ e $x = y + z + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
 - A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

- 4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
 - A) se $S, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 0$) sono due trasformazioni lineari invertibili allora anche $S + T$ è invertibile.
 - B) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni polinomio il suo termine costante è una trasformazione lineare.
 - C) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S^{-1} \circ T^{-1}$ è un automorfismo sullo stesso spazio.
 - D) l'applicazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che manda ogni vettore (x, y) in $(2y, 3x)$ è un endomorfismo.

- 5) Un sistema lineare di n equazioni in $n + 1$ incognite ($n > 0$)
 - A) ha sempre infinite soluzioni.
 - B) è necessariamente privo di soluzioni.
 - C) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
 - D) può essere privo di soluzioni.

- 6) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^7$.
- A) Se a è un autovalore di T allora a è una radice di $p(t)$.
 - B) Se a è una radice di $p(t)$ allora a è un autovalore di T .
 - C) Il grado di $p(t)$ può essere strettamente inferiore a 7.
 - D) T ammette almeno un autovalore reale.
- 7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
- A) se $T : V \rightarrow V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{100} .
 - B) $((1, 1), (0, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
 - C) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$.
 - D) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{u} \rangle \geq 0$.
- 8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $3x - 3y + 3z = 6$ è uguale a 1.
 - B) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(-x, -y, z)$ è una isometria.
 - C) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
 - D) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(2, 0)$, $(4, -3)$, $(8, -1)$, $(10, -4)$ è uguale a 16.
- 9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme delle classi di resto modulo 4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 4.
 - B) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
 - C) l'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
 - D) l'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
 - A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$.
 - B) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
 - C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{u}\|$.
 - D) se $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ sono vettori non nulli di V e $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V .

- 2) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^{10}$. Allora:
 - A) $p(t)$ ammette necessariamente 10 radici distinte.
 - B) se $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ per un certo $\mathbf{v}$ non nullo allora $p(-1) = 0$.
 - C) $p(t)$ non può essere un polinomio costante.
 - D) il polinomio caratteristico di $2T$ è $2p(t)$.

- 3) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora
 - A) $\det(B \cdot A) = \det A \cdot \det B$.
 - B) A è invertibile se e solo se la trasposta di A è invertibile.
 - C) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari T_1 e T_2 .
 - D) se $A + B = \mathbf{0}$ e A è ortogonale allora anche B è ortogonale.

- 4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali nella indeterminata t è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - B) nell'insieme delle matrici reali $n \times n$ la matrice identica $n \times n$ è l'unità rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
 - C) l'insieme dei numeri complessi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
 - D) ogni struttura algebrica con due operazioni è un anello.

- 5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = t$ e $x = t, y = 3s, z = 3s + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
 - A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

- 6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 7$ e $x = 11 + t, y = -t, z = 2$ è nullo.
 - B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e la retta di equazione $12x - 5y = 4$ è uguale a 1.
 - C) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(1, -1, -1), (1, 2, 2), (-2, 2, -1), (-2, -1, 2)$ è 9.
 - D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(2, -1, 4), (5, -4, 7), (8, -7, 10)$ sono allineati.
- 7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
- A) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero $p(1)$ è una trasformazione lineare.
 - B) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(1, 1, 1, 1)$ è una trasformazione lineare.
 - C) la differenza di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
 - D) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^8$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ monotone crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - B) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 3)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
 - C) l'insieme delle terne (x, y, z) di numeri reali con $x = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- 9) Un sistema lineare di $3n$ equazioni in n incognite ($n > 0$)
- A) è necessariamente privo di soluzioni.
 - B) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
 - C) ha esattamente $2n$ soluzioni.
 - D) può essere privo di soluzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
 - A) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^{100} \cdot B^{100} = (A \cdot B)^{100}$.
 - B) se A, B e C sono invertibili allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
 - C) $A + B + C = C + B + A$.
 - D) se A è triangolare ed ha uno zero sulla diagonale principale allora $\det A = 0$.

- 2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y > z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
 - B) l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - C) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ che hanno traccia positiva è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
 - D) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

- 3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
 - A) se $S, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 0$) sono due trasformazioni lineari invertibili allora anche $S + T$ è invertibile.
 - B) l'applicazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che manda ogni vettore (x, y) in $(2y, 3x)$ è un endomorfismo.
 - C) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni polinomio il suo termine costante è una trasformazione lineare.
 - D) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S^{-1} \circ T^{-1}$ è un automorfismo sullo stesso spazio.

- 4) Un sistema lineare di n equazioni in $n + 1$ incognite ($n > 0$)
 - A) ha sempre infinite soluzioni.
 - B) può essere privo di soluzioni.
 - C) è necessariamente privo di soluzioni.
 - D) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.

- 5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e la retta di equazione $12x - 5y = 4$ è uguale a 1.
 - B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(2, -1, 4)$, $(5, -4, 7)$, $(8, -7, 10)$ sono allineati.
 - C) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(1, -1, -1)$, $(1, 2, 2)$, $(-2, 2, -1)$, $(-2, -1, 2)$ è 9.
 - D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 7$ e $x = 11 + t, y = -t, z = 2$ è nullo.
- 6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
 - B) l'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - C) l'insieme delle classi di resto modulo 4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 4.
 - D) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
- 7) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^7$.
- A) Se a è un autovalore di T allora a è una radice di $p(t)$.
 - B) T ammette almeno un autovalore reale.
 - C) Se a è una radice di $p(t)$ allora a è un autovalore di T .
 - D) Il grado di $p(t)$ può essere strettamente inferiore a 7.
- 8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
- A) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
 - B) se $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ sono vettori non nulli di V e $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V .
 - C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \| \mathbf{v} \| \cdot \| \mathbf{u} \|$.
 - D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \| \mathbf{u} \|^2 - \| \mathbf{v} \|^2$.
- 9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = t$ e $x = t, y = 3s, z = 3s + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
- A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Un sistema lineare di $3n$ equazioni in n incognite ($n > 0$)
 - A) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
 - B) ha esattamente $2n$ soluzioni.
 - C) può essere privo di soluzioni.
 - D) è necessariamente privo di soluzioni.

- 2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x = y - z$ e $x = y + z + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
 - A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.

- 3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme dei numeri complessi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
 - B) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali nella indeterminata t è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - C) ogni struttura algebrica con due operazioni è un anello.
 - D) nell'insieme delle matrici reali $n \times n$ la matrice identica $n \times n$ è l'unità rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

- 4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
 - A) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(2, 0)$, $(4, -3)$, $(8, -1)$, $(10, -4)$ è uguale a 16.
 - B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $3x - 3y + 3z = 6$ è uguale a 1.
 - C) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
 - D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(-x, -y, z)$ è una isometria.

- 5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme delle terne (x, y, z) di numeri reali con $x = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ monotone crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - D) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 3)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
- 6) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora
- A) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari T_1 e T_2 .
 - B) $\det(B \cdot A) = \det A \cdot \det B$.
 - C) se $A + B = \mathbf{0}$ e A è ortogonale allora anche B è ortogonale.
 - D) A è invertibile se e solo se la trasposta di A è invertibile.
- 7) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^{10}$. Allora:
- A) se $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ per un certo $\mathbf{v}$ non nullo allora $p(-1) = 0$.
 - B) $p(t)$ non può essere un polinomio costante.
 - C) il polinomio caratteristico di $2T$ è $2p(t)$.
 - D) $p(t)$ ammette necessariamente 10 radici distinte.
- 8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
- A) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(1, 1, 1, 1)$ è una trasformazione lineare.
 - B) la differenza di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
 - C) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^8$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - D) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero $p(1)$ è una trasformazione lineare.
- 9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
- A) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{u} \rangle \geq 0$.
 - B) se $T : V \rightarrow V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{100} .
 - C) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$.
 - D) $((1, 1), (0, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ monotone crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - C) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 3)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
 - D) l'insieme delle terne (x, y, z) di numeri reali con $x = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

- 2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x = y - z$ e $x = y + z + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
 - A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.

- 3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
 - A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $3x - 3y + 3z = 6$ è uguale a 1.
 - B) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
 - C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(2, 0)$, $(4, -3)$, $(8, -1)$, $(10, -4)$ è uguale a 16.
 - D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(-x, -y, z)$ è una isometria.

- 4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
 - A) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S^{-1} \circ T^{-1}$ è un automorfismo sullo stesso spazio.
 - B) l'applicazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che manda ogni vettore (x, y) in $(2y, 3x)$ è un endomorfismo.
 - C) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni polinomio il suo termine costante è una trasformazione lineare.
 - D) se $S, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 0$) sono due trasformazioni lineari invertibili allora anche $S + T$ è invertibile.

- 5) Un sistema lineare di n equazioni in $n + 1$ incognite ($n > 0$)
- A) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
 - B) può essere privo di soluzioni.
 - C) è necessariamente privo di soluzioni.
 - D) ha sempre infinite soluzioni.
- 6) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^7$.
- A) Il grado di $p(t)$ può essere strettamente inferiore a 7.
 - B) T ammette almeno un autovalore reale.
 - C) Se a è una radice di $p(t)$ allora a è un autovalore di T .
 - D) Se a è un autovalore di T allora a è una radice di $p(t)$.
- 7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
- A) se $T : V \rightarrow V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{100} .
 - B) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$.
 - C) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{u} \rangle \geq 0$.
 - D) $((1, 1), (0, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
- 8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali nella indeterminata t è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - B) ogni struttura algebrica con due operazioni è un anello.
 - C) nell'insieme delle matrici reali $n \times n$ la matrice identica $n \times n$ è l'unità rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
 - D) l'insieme dei numeri complessi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
- 9) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora
- A) $\det(B \cdot A) = \det A \cdot \det B$.
 - B) se $A + B = \mathbf{0}$ e A è ortogonale allora anche B è ortogonale.
 - C) A è invertibile se e solo se la trasposta di A è invertibile.
 - D) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari T_1 e T_2 .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = t$ e $x = t, y = 3s, z = 3s + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
 - A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

- 2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
 - A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$.
 - B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{u}\|$.
 - C) se $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ sono vettori non nulli di V e $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V .
 - D) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.

- 3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
 - A) se A, B e C sono invertibili allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
 - B) se A è triangolare ed ha uno zero sulla diagonale principale allora $\det A = 0$.
 - C) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^{100} \cdot B^{100} = (A \cdot B)^{100}$.
 - D) $A + B + C = C + B + A$.

- 4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - B) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
 - C) l'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
 - D) l'insieme delle classi di resto modulo 4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 4.

- 5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - B) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y > z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
 - D) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ che hanno traccia positiva è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
- 6) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^{10}$. Allora:
- A) $p(t)$ ammette necessariamente 10 radici distinte.
 - B) se $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ per un certo $\mathbf{v}$ non nullo allora $p(-1) = 0$.
 - C) $p(t)$ non può essere un polinomio costante.
 - D) il polinomio caratteristico di $2T$ è $2p(t)$.
- 7) Un sistema lineare di $3n$ equazioni in n incognite ($n > 0$)
- A) è necessariamente privo di soluzioni.
 - B) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
 - C) ha esattamente $2n$ soluzioni.
 - D) può essere privo di soluzioni.
- 8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
- A) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero $p(1)$ è una trasformazione lineare.
 - B) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(1, 1, 1, 1)$ è una trasformazione lineare.
 - C) la differenza di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
 - D) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^8$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 7$ e $x = 11 + t, y = -t, z = 2$ è nullo.
 - B) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(1, -1, -1), (1, 2, 2), (-2, 2, -1), (-2, -1, 2)$ è 9.
 - C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(2, -1, 4), (5, -4, 7), (8, -7, 10)$ sono allineati.
 - D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e la retta di equazione $12x - 5y = 4$ è uguale a 1.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
 - A) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S^{-1} \circ T^{-1}$ è un automorfismo sullo stesso spazio.
 - B) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni polinomio il suo termine costante è una trasformazione lineare.
 - C) se $S, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 0$) sono due trasformazioni lineari invertibili allora anche $S + T$ è invertibile.
 - D) l'applicazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che manda ogni vettore (x, y) in $(2y, 3x)$ è un endomorfismo.

- 2) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^7$.
 - A) Il grado di $p(t)$ può essere strettamente inferiore a 7.
 - B) Se a è una radice di $p(t)$ allora a è un autovalore di T .
 - C) Se a è un autovalore di T allora a è una radice di $p(t)$.
 - D) T ammette almeno un autovalore reale.

- 3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
 - A) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
 - B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$.
 - C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{u}\|$.
 - D) se $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ sono vettori non nulli di V e $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V .

- 4) Un sistema lineare di n equazioni in $n + 1$ incognite ($n > 0$)
 - A) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
 - B) è necessariamente privo di soluzioni.
 - C) ha sempre infinite soluzioni.
 - D) può essere privo di soluzioni.

- 5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = t$ e $x = t, y = 3s, z = 3s + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
 - A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

- 6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e la retta di equazione $12x - 5y = 4$ è uguale a 1.
 - B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 7$ e $x = 11 + t, y = -t, z = 2$ è nullo.
 - C) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(1, -1, -1), (1, 2, 2), (-2, 2, -1), (-2, -1, 2)$ è 9.
 - D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(2, -1, 4), (5, -4, 7), (8, -7, 10)$ sono allineati.
- 7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) ogni struttura algebrica con due operazioni è un anello.
 - B) nell'insieme delle matrici reali $n \times n$ la matrice identica $n \times n$ è l'unità rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
 - C) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali nella indeterminata t è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - D) l'insieme dei numeri complessi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
- 8) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora
- A) se $A + B = \mathbf{0}$ e A è ortogonale allora anche B è ortogonale.
 - B) A è invertibile se e solo se la trasposta di A è invertibile.
 - C) $\det(B \cdot A) = \det A \cdot \det B$.
 - D) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari T_1 e T_2 .
- 9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - B) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 3)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
 - C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ monotone crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - D) l'insieme delle terne (x, y, z) di numeri reali con $x = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Siano A , B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
 - A) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^{100} \cdot B^{100} = (A \cdot B)^{100}$.
 - B) se A , B e C sono invertibili allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
 - C) se A è triangolare ed ha uno zero sulla diagonale principale allora $\det A = 0$.
 - D) $A + B + C = C + B + A$.

- 2) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^{10}$. Allora:
 - A) $p(t)$ ammette necessariamente 10 radici distinte.
 - B) se $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ per un certo $\mathbf{v}$ non nullo allora $p(-1) = 0$.
 - C) il polinomio caratteristico di $2T$ è $2p(t)$.
 - D) $p(t)$ non può essere un polinomio costante.

- 3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
 - A) se $T : V \rightarrow V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{100} .
 - B) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$.
 - C) $((1, 1), (0, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
 - D) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{u} \rangle \geq 0$.

- 4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y > z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
 - B) l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - C) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - D) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ che hanno traccia positiva è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

- 5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
 - B) l'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - C) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
 - D) l'insieme delle classi di resto modulo 4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 4.

- 6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x = y - z$ e $x = y + z + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
- A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
- 7) Un sistema lineare di $3n$ equazioni in n incognite ($n > 0$)
- A) è necessariamente privo di soluzioni.
 - B) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
 - C) può essere privo di soluzioni.
 - D) ha esattamente $2n$ soluzioni.
- 8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
- A) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero $p(1)$ è una trasformazione lineare.
 - B) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(1, 1, 1, 1)$ è una trasformazione lineare.
 - C) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^8$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - D) la differenza di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
- 9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $3x - 3y + 3z = 6$ è uguale a 1.
 - B) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
 - C) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(-x, -y, z)$ è una isometria.
 - D) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(2, 0)$, $(4, -3)$, $(8, -1)$, $(10, -4)$ è uguale a 16.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - B) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ che hanno traccia positiva è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
 - C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y > z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
 - D) l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- 2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
 - A) l'applicazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che manda ogni vettore (x, y) in $(2y, 3x)$ è un endomorfismo.
 - B) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S^{-1} \circ T^{-1}$ è un automorfismo sullo stesso spazio.
 - C) se $S, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 0$) sono due trasformazioni lineari invertibili allora anche $S + T$ è invertibile.
 - D) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni polinomio il suo termine costante è una trasformazione lineare.

- 3) Un sistema lineare di n equazioni in $n + 1$ incognite ($n > 0$)
 - A) può essere privo di soluzioni.
 - B) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
 - C) ha sempre infinite soluzioni.
 - D) è necessariamente privo di soluzioni.

- 4) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^7$.
 - A) T ammette almeno un autovalore reale.
 - B) Il grado di $p(t)$ può essere strettamente inferiore a 7.
 - C) Se a è un autovalore di T allora a è una radice di $p(t)$.
 - D) Se a è una radice di $p(t)$ allora a è un autovalore di T .

- 5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
 - A) se A è triangolare ed ha uno zero sulla diagonale principale allora $\det A = 0$.
 - B) $A + B + C = C + B + A$.
 - C) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^{100} \cdot B^{100} = (A \cdot B)^{100}$.
 - D) se A, B e C sono invertibili allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.

- 6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x = y - z$ e $x = y + z + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
- A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
- 7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(2, 0)$, $(4, -3)$, $(8, -1)$, $(10, -4)$ è uguale a 16.
 - B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $3x - 3y + 3z = 6$ è uguale a 1.
 - C) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
 - D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(-x, -y, z)$ è una isometria.
- 8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
- A) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{u} \rangle \geq 0$.
 - B) se $T : V \rightarrow V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{100} .
 - C) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$.
 - D) $((1, 1), (0, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
- 9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
 - B) l'insieme delle classi di resto modulo 4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 4.
 - C) l'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
 - D) l'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = t$ e $x = t, y = 3s, z = 3s + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
 - A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

- 2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
 - A) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
 - B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \| \mathbf{v} \| \cdot \| \mathbf{u} \|$.
 - C) se $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ sono vettori non nulli di V e $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V .
 - D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \| \mathbf{u} \|^2 - \| \mathbf{v} \|^2$.

- 3) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora
 - A) A è invertibile se e solo se la trasposta di A è invertibile.
 - B) se $A + B = \mathbf{0}$ e A è ortogonale allora anche B è ortogonale.
 - C) $\det(B \cdot A) = \det A \cdot \det B$.
 - D) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari T_1 e T_2 .

- 4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) nell'insieme delle matrici reali $n \times n$ la matrice identica $n \times n$ è l'unità rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
 - B) ogni struttura algebrica con due operazioni è un anello.
 - C) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali nella indeterminata t è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - D) l'insieme dei numeri complessi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

- 5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
- A) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^8$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - B) la differenza di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
 - C) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero $p(1)$ è una trasformazione lineare.
 - D) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(1, 1, 1, 1)$ è una trasformazione lineare.
- 6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 3)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
 - B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ monotone crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - D) l'insieme delle terne (x, y, z) di numeri reali con $x = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- 7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e la retta di equazione $12x - 5y = 4$ è uguale a 1.
 - B) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(1, -1, -1)$, $(1, 2, 2)$, $(-2, 2, -1)$, $(-2, -1, 2)$ è 9.
 - C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(2, -1, 4)$, $(5, -4, 7)$, $(8, -7, 10)$ sono allineati.
 - D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 7$ e $x = 11 + t, y = -t, z = 2$ è nullo.
- 8) Un sistema lineare di $3n$ equazioni in n incognite ($n > 0$)
- A) può essere privo di soluzioni.
 - B) ha esattamente $2n$ soluzioni.
 - C) è necessariamente privo di soluzioni.
 - D) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
- 9) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^{10}$. Allora:
- A) il polinomio caratteristico di $2T$ è $2p(t)$.
 - B) $p(t)$ non può essere un polinomio costante.
 - C) $p(t)$ ammette necessariamente 10 radici distinte.
 - D) se $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ per un certo $\mathbf{v}$ non nullo allora $p(-1) = 0$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
 - A) se $S, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 0$) sono due trasformazioni lineari invertibili allora anche $S + T$ è invertibile.
 - B) l'applicazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che manda ogni vettore (x, y) in $(2y, 3x)$ è un endomorfismo.
 - C) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S^{-1} \circ T^{-1}$ è un automorfismo sullo stesso spazio.
 - D) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni polinomio il suo termine costante è una trasformazione lineare.

- 2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
 - A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$.
 - B) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
 - C) se $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ sono vettori non nulli di V e $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V .
 - D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{u}\|$.

- 3) Un sistema lineare di n equazioni in $n + 1$ incognite ($n > 0$)
 - A) ha sempre infinite soluzioni.
 - B) può essere privo di soluzioni.
 - C) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
 - D) è necessariamente privo di soluzioni.

- 4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = t$ e $x = t, y = 3s, z = 3s + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
 - A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

- 5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 7$ e $x = 11 + t, y = -t, z = 2$ è nullo.
 - B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e la retta di equazione $12x - 5y = 4$ è uguale a 1.
 - C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(2, -1, 4)$, $(5, -4, 7)$, $(8, -7, 10)$ sono allineati.
 - D) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(1, -1, -1)$, $(1, 2, 2)$, $(-2, 2, -1)$, $(-2, -1, 2)$ è 9.
- 6) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^7$.
- A) Se a è un autovalore di T allora a è una radice di $p(t)$.
 - B) T ammette almeno un autovalore reale.
 - C) Il grado di $p(t)$ può essere strettamente inferiore a 7.
 - D) Se a è una radice di $p(t)$ allora a è un autovalore di T .
- 7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme delle classi di resto modulo 4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 4.
 - B) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
 - C) l'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - D) l'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
- 8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
- A) $A + B + C = C + B + A$.
 - B) se A è triangolare ed ha uno zero sulla diagonale principale allora $\det A = 0$.
 - C) se A, B e C sono invertibili allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
 - D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^{100} \cdot B^{100} = (A \cdot B)^{100}$.
- 9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ che hanno traccia positiva è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
 - B) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - C) l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - D) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y > z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) ogni struttura algebrica con due operazioni è un anello.
 - B) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali nella indeterminata t è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - C) l'insieme dei numeri complessi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
 - D) nell'insieme delle matrici reali $n \times n$ la matrice identica $n \times n$ è l'unità rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

- 2) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^{10}$. Allora:
 - A) il polinomio caratteristico di $2T$ è $2p(t)$.
 - B) $p(t)$ ammette necessariamente 10 radici distinte.
 - C) $p(t)$ non può essere un polinomio costante.
 - D) se $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ per un certo $\mathbf{v}$ non nullo allora $p(-1) = 0$.

- 3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ monotone crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - C) l'insieme delle terne (x, y, z) di numeri reali con $x = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - D) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 3)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

- 4) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora
 - A) se $A + B = \mathbf{0}$ e A è ortogonale allora anche B è ortogonale.
 - B) $\det(B \cdot A) = \det A \cdot \det B$.
 - C) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari T_1 e T_2 .
 - D) A è invertibile se e solo se la trasposta di A è invertibile.

- 5) Un sistema lineare di $3n$ equazioni in n incognite ($n > 0$)
 - A) può essere privo di soluzioni.
 - B) è necessariamente privo di soluzioni.
 - C) ha esattamente $2n$ soluzioni.
 - D) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.

- 6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
- A) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^8$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - B) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero $p(1)$ è una trasformazione lineare.
 - C) la differenza di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
 - D) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(1, 1, 1, 1)$ è una trasformazione lineare.
- 7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
- A) $((1, 1), (0, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
 - B) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{u} \rangle \geq 0$.
 - C) se $T : V \rightarrow V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{100} .
 - D) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$.
- 8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(-x, -y, z)$ è una isometria.
 - B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(2, 0)$, $(4, -3)$, $(8, -1)$, $(10, -4)$ è uguale a 16.
 - C) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $3x - 3y + 3z = 6$ è uguale a 1.
 - D) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
- 9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x = y - z$ e $x = y + z + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
- A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x = y - z$ e $x = y + z + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
 - A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.

- 2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
 - A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $3x - 3y + 3z = 6$ è uguale a 1.
 - B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(2, 0)$, $(4, -3)$, $(8, -1)$, $(10, -4)$ è uguale a 16.
 - C) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
 - D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(-x, -y, z)$ è una isometria.

- 3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ monotone crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - C) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 3)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
 - D) l'insieme delle terne (x, y, z) di numeri reali con $x = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

- 4) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^7$.
 - A) Se a è una radice di $p(t)$ allora a è un autovalore di T .
 - B) T ammette almeno un autovalore reale.
 - C) Se a è un autovalore di T allora a è una radice di $p(t)$.
 - D) Il grado di $p(t)$ può essere strettamente inferiore a 7.

- 5) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
- A) se $T : V \rightarrow V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{100} .
 - B) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{u} \rangle \geq 0$.
 - C) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$.
 - D) $((1, 1), (0, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
- 6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali nella indeterminata t è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - B) ogni struttura algebrica con due operazioni è un anello.
 - C) nell'insieme delle matrici reali $n \times n$ la matrice identica $n \times n$ è l'unità rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
 - D) l'insieme dei numeri complessi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
- 7) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora
- A) $\det(B \cdot A) = \det A \cdot \det B$.
 - B) se $A + B = \mathbf{0}$ e A è ortogonale allora anche B è ortogonale.
 - C) A è invertibile se e solo se la trasposta di A è invertibile.
 - D) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari T_1 e T_2 .
- 8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
- A) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni polinomio il suo termine costante è una trasformazione lineare.
 - B) l'applicazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che manda ogni vettore (x, y) in $(2y, 3x)$ è un endomorfismo.
 - C) se $S, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 0$) sono due trasformazioni lineari invertibili allora anche $S + T$ è invertibile.
 - D) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S^{-1} \circ T^{-1}$ è un automorfismo sullo stesso spazio.
- 9) Un sistema lineare di n equazioni in $n + 1$ incognite ($n > 0$)
- A) è necessariamente privo di soluzioni.
 - B) può essere privo di soluzioni.
 - C) ha sempre infinite soluzioni.
 - D) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
 - A) la differenza di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
 - B) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(1, 1, 1, 1)$ è una trasformazione lineare.
 - C) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^8$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - D) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero $p(1)$ è una trasformazione lineare.

- 2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
 - B) l'insieme delle classi di resto modulo 4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 4.
 - C) l'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - D) l'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

- 3) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^{10}$. Allora:
 - A) $p(t)$ non può essere un polinomio costante.
 - B) se $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ per un certo $\mathbf{v}$ non nullo allora $p(-1) = 0$.
 - C) il polinomio caratteristico di $2T$ è $2p(t)$.
 - D) $p(t)$ ammette necessariamente 10 radici distinte.

- 4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
 - A) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(1, -1, -1)$, $(1, 2, 2)$, $(-2, 2, -1)$, $(-2, -1, 2)$ è 9.
 - B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e la retta di equazione $12x - 5y = 4$ è uguale a 1.
 - C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 7$ e $x = 11 + t, y = -t, z = 2$ è nullo.
 - D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(2, -1, 4)$, $(5, -4, 7)$, $(8, -7, 10)$ sono allineati.

- 5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - B) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ che hanno traccia positiva è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
 - C) l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - D) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y > z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
- 6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
- A) se A è triangolare ed ha uno zero sulla diagonale principale allora $\det A = 0$.
 - B) $A + B + C = C + B + A$.
 - C) se A, B e C sono invertibili allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
 - D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^{100} \cdot B^{100} = (A \cdot B)^{100}$.
- 7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
- A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \| \mathbf{v} \| \cdot \| \mathbf{u} \|$.
 - B) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
 - C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \| \mathbf{u} \|^2 - \| \mathbf{v} \|^2$.
 - D) se $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ sono vettori non nulli di V e $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V .
- 8) Un sistema lineare di $3n$ equazioni in n incognite ($n > 0$)
- A) ha esattamente $2n$ soluzioni.
 - B) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
 - C) può essere privo di soluzioni.
 - D) è necessariamente privo di soluzioni.
- 9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = t$ e $x = t, y = 3s, z = 3s + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
- A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
 - A) se $S, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 0$) sono due trasformazioni lineari invertibili allora anche $S + T$ è invertibile.
 - B) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni polinomio il suo termine costante è una trasformazione lineare.
 - C) l'applicazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che manda ogni vettore (x, y) in $(2y, 3x)$ è un endomorfismo.
 - D) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S^{-1} \circ T^{-1}$ è un automorfismo sullo stesso spazio.
- 2) Un sistema lineare di n equazioni in $n + 1$ incognite ($n > 0$)
 - A) ha sempre infinite soluzioni.
 - B) è necessariamente privo di soluzioni.
 - C) può essere privo di soluzioni.
 - D) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
- 3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = t$ e $x = t, y = 3s, z = 3s + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
 - A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
- 4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
 - A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e la retta di equazione $12x - 5y = 4$ è uguale a 1.
 - B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 7$ e $x = 11 + t, y = -t, z = 2$ è nullo.
 - C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(2, -1, 4)$, $(5, -4, 7)$, $(8, -7, 10)$ sono allineati.
 - D) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(1, -1, -1)$, $(1, 2, 2)$, $(-2, 2, -1)$, $(-2, -1, 2)$ è 9.
- 5) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^7$.
 - A) Se a è un autovalore di T allora a è una radice di $p(t)$.
 - B) Se a è una radice di $p(t)$ allora a è un autovalore di T .
 - C) T ammette almeno un autovalore reale.
 - D) Il grado di $p(t)$ può essere strettamente inferiore a 7.

- 6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
- A) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
 - B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$.
 - C) se $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ sono vettori non nulli di V e $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V .
 - D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{u}\|$.
- 7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) ogni struttura algebrica con due operazioni è un anello.
 - B) nell'insieme delle matrici reali $n \times n$ la matrice identica $n \times n$ è l'unità rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
 - C) l'insieme dei numeri complessi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
 - D) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali nella indeterminata t è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- 8) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora
- A) se $A + B = \mathbf{0}$ e A è ortogonale allora anche B è ortogonale.
 - B) A è invertibile se e solo se la trasposta di A è invertibile.
 - C) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari T_1 e T_2 .
 - D) $\det(B \cdot A) = \det A \cdot \det B$.
- 9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - B) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 3)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
 - C) l'insieme delle terne (x, y, z) di numeri reali con $x = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ monotone crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Siano A , B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
 - A) se A , B e C sono invertibili allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
 - B) $A + B + C = C + B + A$.
 - C) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^{100} \cdot B^{100} = (A \cdot B)^{100}$.
 - D) se A è triangolare ed ha uno zero sulla diagonale principale allora $\det A = 0$.
- 2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - B) l'insieme delle classi di resto modulo 4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 4.
 - C) l'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
 - D) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
- 3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - B) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ che hanno traccia positiva è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
 - C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y > z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
 - D) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- 4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
 - A) se $T : V \rightarrow V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{100} .
 - B) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$.
 - C) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{u} \rangle \geq 0$.
 - D) $((1, 1), (0, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
- 5) Un sistema lineare di $3n$ equazioni in n incognite ($n > 0$)
 - A) può essere privo di soluzioni.
 - B) ha esattamente $2n$ soluzioni.
 - C) è necessariamente privo di soluzioni.
 - D) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.

- 6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
- A) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^8$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - B) la differenza di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
 - C) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero $p(1)$ è una trasformazione lineare.
 - D) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(1, 1, 1, 1)$ è una trasformazione lineare.
- 7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x = y - z$ e $x = y + z + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
- A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
- 8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $3x - 3y + 3z = 6$ è uguale a 1.
 - B) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
 - C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(2, 0)$, $(4, -3)$, $(8, -1)$, $(10, -4)$ è uguale a 16.
 - D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(-x, -y, z)$ è una isometria.
- 9) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^{10}$. Allora:
- A) il polinomio caratteristico di $2T$ è $2p(t)$.
 - B) $p(t)$ non può essere un polinomio costante.
 - C) $p(t)$ ammette necessariamente 10 radici distinte.
 - D) se $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ per un certo $\mathbf{v}$ non nullo allora $p(-1) = 0$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Un sistema lineare di n equazioni in $n + 1$ incognite ($n > 0$)
 - A) ha sempre infinite soluzioni.
 - B) è necessariamente privo di soluzioni.
 - C) può essere privo di soluzioni.
 - D) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.

- 2) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^7$.
 - A) Se a è un autovalore di T allora a è una radice di $p(t)$.
 - B) Se a è una radice di $p(t)$ allora a è un autovalore di T .
 - C) T ammette almeno un autovalore reale.
 - D) Il grado di $p(t)$ può essere strettamente inferiore a 7.

- 3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
 - A) se $T : V \rightarrow V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{100} .
 - B) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{u} \rangle \geq 0$.
 - C) $((1, 1), (0, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
 - D) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$.

- 4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
 - B) l'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - C) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
 - D) l'insieme delle classi di resto modulo 4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 4.

- 5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x = y - z$ e $x = y + z + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
 - A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

- 6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $3x - 3y + 3z = 6$ è uguale a 1.
 - B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(2, 0)$, $(4, -3)$, $(8, -1)$, $(10, -4)$ è uguale a 16.
 - C) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(-x, -y, z)$ è una isometria.
 - D) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
- 7) Siano A , B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
- A) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^{100} \cdot B^{100} = (A \cdot B)^{100}$.
 - B) se A , B e C sono invertibili allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
 - C) se A è triangolare ed ha uno zero sulla diagonale principale allora $\det A = 0$.
 - D) $A + B + C = C + B + A$.
- 8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y > z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
 - B) l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - C) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - D) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ che hanno traccia positiva è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
- 9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
- A) se $S, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 0$) sono due trasformazioni lineari invertibili allora anche $S + T$ è invertibile.
 - B) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni polinomio il suo termine costante è una trasformazione lineare.
 - C) l'applicazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che manda ogni vettore (x, y) in $(2y, 3x)$ è un endomorfismo.
 - D) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S^{-1} \circ T^{-1}$ è un automorfismo sullo stesso spazio.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora
 - A) $\det(B \cdot A) = \det A \cdot \det B$.
 - B) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari T_1 e T_2 .
 - C) A è invertibile se e solo se la trasposta di A è invertibile.
 - D) se $A + B = \mathbf{0}$ e A è ortogonale allora anche B è ortogonale.

- 2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali nella indeterminata t è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - B) l'insieme dei numeri complessi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
 - C) nell'insieme delle matrici reali $n \times n$ la matrice identica $n \times n$ è l'unità rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
 - D) ogni struttura algebrica con due operazioni è un anello.

- 3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
 - A) la differenza di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
 - B) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^8$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - C) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(1, 1, 1, 1)$ è una trasformazione lineare.
 - D) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero $p(1)$ è una trasformazione lineare.

- 4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ monotone crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - B) l'insieme delle terne (x, y, z) di numeri reali con $x = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - C) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 3)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
 - D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

- 5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = t$ e $x = t, y = 3s, z = 3s + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
- A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
- 6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
- A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$.
 - B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{u}\|$.
 - C) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
 - D) se $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ sono vettori non nulli di V e $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V .
- 7) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^{10}$. Allora:
- A) $p(t)$ non può essere un polinomio costante.
 - B) il polinomio caratteristico di $2T$ è $2p(t)$.
 - C) se $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ per un certo $\mathbf{v}$ non nullo allora $p(-1) = 0$.
 - D) $p(t)$ ammette necessariamente 10 radici distinte.
- 8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 7$ e $x = 11 + t, y = -t, z = 2$ è nullo.
 - B) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(1, -1, -1), (1, 2, 2), (-2, 2, -1), (-2, -1, 2)$ è 9.
 - C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e la retta di equazione $12x - 5y = 4$ è uguale a 1.
 - D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(2, -1, 4), (5, -4, 7), (8, -7, 10)$ sono allineati.
- 9) Un sistema lineare di $3n$ equazioni in n incognite ($n > 0$)
- A) ha esattamente $2n$ soluzioni.
 - B) può essere privo di soluzioni.
 - C) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
 - D) è necessariamente privo di soluzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
 - A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \| \mathbf{v} \| \cdot \| \mathbf{u} \|$.
 - B) V ammette esattamente n basi ortogonali distinte.
 - C) se $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ sono vettori non nulli di V e $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V .
 - D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \| \mathbf{u} \|^2 - \| \mathbf{v} \|^2$.

- 2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
 - A) l'applicazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che manda ogni vettore (x, y) in $(2y, 3x)$ è un endomorfismo.
 - B) se $S, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 0$) sono due trasformazioni lineari invertibili allora anche $S + T$ è invertibile.
 - C) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni polinomio il suo termine costante è una trasformazione lineare.
 - D) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S^{-1} \circ T^{-1}$ è un automorfismo sullo stesso spazio.

- 3) Un sistema lineare di n equazioni in $n + 1$ incognite ($n > 0$)
 - A) può essere privo di soluzioni.
 - B) ha sempre infinite soluzioni.
 - C) è necessariamente privo di soluzioni.
 - D) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.

- 4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
 - A) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(1, -1, -1)$, $(1, 2, 2)$, $(-2, 2, -1)$, $(-2, -1, 2)$ è 9.
 - B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e la retta di equazione $12x - 5y = 4$ è uguale a 1.
 - C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(2, -1, 4)$, $(5, -4, 7)$, $(8, -7, 10)$ sono allineati.
 - D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 7$ e $x = 11 + t, y = -t, z = 2$ è nullo.

- 5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
 - B) l'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
 - C) l'insieme delle classi di resto modulo 4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma modulo 4.
 - D) l'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- 6) Siano A , B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
- A) se A è triangolare ed ha uno zero sulla diagonale principale allora $\det A = 0$.
 - B) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^{100} \cdot B^{100} = (A \cdot B)^{100}$.
 - C) $A + B + C = C + B + A$.
 - D) se A , B e C sono invertibili allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
- 7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y > z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
 - C) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ che hanno traccia positiva è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
 - D) l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = s, y = t, z = t$ e $x = t, y = 3s, z = 3s + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
- A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
- 9) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^7$.
- A) T ammette almeno un autovalore reale.
 - B) Se a è un autovalore di T allora a è una radice di $p(t)$.
 - C) Se a è una radice di $p(t)$ allora a è un autovalore di T .
 - D) Il grado di $p(t)$ può essere strettamente inferiore a 7.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.

- 1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
 - A) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$.
 - B) $((1, 1), (0, 1))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
 - C) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{u} \rangle \geq 0$.
 - D) se $T : V \rightarrow V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{100} .
- 2) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora
 - A) A è invertibile se e solo se la trasposta di A è invertibile.
 - B) $\det(B \cdot A) = \det A \cdot \det B$.
 - C) A è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni elementari T_1 e T_2 .
 - D) se $A + B = \mathbf{0}$ e A è ortogonale allora anche B è ortogonale.
- 3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 3)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
 - B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ monotone crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - C) l'insieme delle terne (x, y, z) di numeri reali con $x = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
 - D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- 4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $x = y - z$ e $x = y + z + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
 - A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
 - B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
 - C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 - D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
- 5) Un sistema lineare di $3n$ equazioni in n incognite ($n > 0$)
 - A) ha esattamente $2n$ soluzioni.
 - B) è necessariamente privo di soluzioni.
 - C) ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni.
 - D) può essere privo di soluzioni.

- 6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
- A) la differenza di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
 - B) la funzione $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero $p(1)$ è una trasformazione lineare.
 - C) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(1, 1, 1, 1)$ è una trasformazione lineare.
 - D) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^8$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 7) Sia $p(t)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di $\mathbb{R}^{10}$. Allora:
- A) $p(t)$ non può essere un polinomio costante.
 - B) $p(t)$ ammette necessariamente 10 radici distinte.
 - C) se $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ per un certo $\mathbf{v}$ non nullo allora $p(-1) = 0$.
 - D) il polinomio caratteristico di $2T$ è $2p(t)$.
- 8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
 - B) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(-x, -y, z)$ è una isometria.
 - C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(2, 0)$, $(4, -3)$, $(8, -1)$, $(10, -4)$ è uguale a 16.
 - D) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $3x - 3y + 3z = 6$ è uguale a 1.
- 9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) nell'insieme delle matrici reali $n \times n$ la matrice identica $n \times n$ è l'unità rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
 - B) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali nella indeterminata t è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
 - C) l'insieme dei numeri complessi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
 - D) ogni struttura algebrica con due operazioni è un anello.