

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
 - A) insieme delle matrici reali 3×3 ottenute moltiplicando la matrice identica per un qualunque numero reale, con l'usuale somma di matrici.
 - B) Insieme delle funzioni continue da \mathbf{R} in \mathbf{R} , con l'usuale somma di funzioni.
 - C) $(\mathbf{R}^7, +)$ (\mathbf{R}^7 = insieme delle 7-uple ordinate di numeri reali, $+$ = usuale somma di n -uple).
 - D) (\mathbf{C}, \cdot) (\mathbf{C} = insieme dei numeri complessi, \cdot = usuale prodotto di numeri complessi).

- 2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(A \cdot {}^t B \cdot C)$.
 - B) $\det(A + 3B + 5C) = \det A + 3 \det B + 5 \det C$.
 - C) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
 - D) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.

- 3) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 0), (1, 2, 3, 0)\}$ è una base per \mathbf{R}^4 .
 - B) l'insieme $\{(1, 1, 0, 1, 3), (1, 2, -1, 0, -2), (3, 1, 1, 3, -1), (4, 1, 3, 1, 0)\}$ è un insieme di generatori per \mathbf{R}^5 .
 - C) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 - D) l'unione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.

- 4) Sia T una trasformazione lineare da uno spazio vettoriale U ad uno spazio vettoriale W , entrambi di dimensione finita. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) $\dim W = \dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T)$.
 - B) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
 - C) se $\dim(\ker T) = 0$ allora T è iniettiva.
 - D) la funzione $2T$ è anch'essa una trasformazione lineare.

- 5) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se \mathbf{S} è omogeneo ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se $n > \rho(C)$.
 - B) il sistema ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
 - C) se $m > n$ allora \mathbf{S} non ammette soluzioni.
 - D) se $m = n + 1$ e $\det C = 0$ allora \mathbf{S} ammette almeno una soluzione.

- 6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) λ è un autovalore di T se e solo se è una radice del suo polinomio caratteristico.
 - B) se 0 è un autovalore di T allora T non è un isomorfismo.
 - C) se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - D) se $\det(\lambda I - A) = 0$ per un certo numero reale λ allora V ammette una base spettrale relativa a T .
- 7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) per definizione, si dice versore ogni vettore dotato di verso.
 - B) le trasformazioni ortogonali fra spazi vettoriali euclidei conservano le norme dei vettori.
 - C) due basi ordinate di uno spazio vettoriale euclideo si dicono discordi se la matrice del cambiamento di base dalla prima base alla seconda ha determinante negativo.
 - D) se due vettori u, v di uno spazio vettoriale euclideo sono ortogonali allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
- 8) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - B) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - C) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - D) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
- 9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato:
- A) le rette di equazioni cartesiane $2x - y = 0$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
 - B) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e l'asse delle x è 5 .
 - C) la conica di equazione $y = 4x^2$ è un'iperbole.
 - D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 4)$ è $\sqrt{3}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se A non è simmetrica allora V non può ammettere una base spettrale relativa a T .
 - B) se v è un autovettore di T allora esiste un λ tale che $T(v) = \lambda v$.
 - C) la molteplicità geometrica di un autovalore di T è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica.
 - D) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.

- 2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato:
 - A) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e il punto di coordinate $(2, 1)$ è $\sqrt{2}$.
 - B) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, 2)$ e l'asse delle y è 1.
 - C) la conica di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ è un'ellisse.
 - D) se il punto P ha coordinate $(1, 3)$ e il punto Q ha coordinate $(7, 1)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(3, -1)$.

- 3) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$$
 rispetto al riferimento cartesiano naturale. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
 - B) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - C) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - D) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .

- 4) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) $T \circ T$ è ancora un automorfismo di V .
 - B) $\dim V = \rho(A)$.
 - C) T è iniettiva e suriettiva.
 - D) $\det A = \rho(A)$.

- 5) Siano A , B e C tre matrici reali invertibili $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
 - B) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
 - C) $\det(2A) = 2^n \det A$.
 - D) ${}^t({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = A \cdot B \cdot C$.
- 6) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
- A) $(\mathbf{Z}, +)$ (\mathbf{Z} = insieme dei numeri interi, $+$ = usuale somma di numeri interi).
 - B) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - C) l'insieme \mathbf{Z}_5 delle classi di resto modulo 5, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - D) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ (\mathbf{Q} = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, \cdot = usuale prodotto di numeri razionali).
- 7) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 - B) se $m = n$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 - C) se \mathbf{S} non ammette soluzioni allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
 - D) se $m < n$ allora \mathbf{S} ammette ∞^{n-m} soluzioni.
- 8) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ è una base per \mathbf{R}^3 .
 - B) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - C) l'insieme delle settuple ordinate di numeri interi dispari è un insieme di generatori per \mathbf{R}^7 .
 - D) l'unione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
- 9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V con $\dim U = 8$ e $\dim V = 10$ allora $\dim {}^\perp U = 18$.
 - B) su ogni spazio vettoriale euclideo esiste uno ed un solo prodotto scalare.
 - C) ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette una base ortonormale.
 - D) l'insieme $\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, -2, 1)\}$ è una base ortogonale per lo spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Siano A , B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) $\text{Tr}(A + B + C) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) + \text{Tr}(C)$.
 - B) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(A \cdot {}^tB \cdot C)$.
 - C) $\det(A + 3B + 5C) = \det A + 3 \det B + 5 \det C$.
 - D) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

- 2) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se $m = n + 1$ e $\det C = 0$ allora \mathbf{S} ammette almeno una soluzione.
 - B) se $m > n$ allora \mathbf{S} non ammette soluzioni.
 - C) il sistema ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
 - D) se \mathbf{S} è omogeneo ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se $n > \rho(C)$.

- 3) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se $\det(\lambda I - A) = 0$ per un certo numero reale λ allora V ammette una base spettrale relativa a T .
 - B) se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - C) se 0 è un autovalore di T allora T non è un isomorfismo.
 - D) λ è un autovalore di T se e solo se è una radice del suo polinomio caratteristico.

- 4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme $\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, -2, 1)\}$ è una base ortogonale per lo spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale.
 - B) ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette una base ortonormale.
 - C) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V con $\dim U = 8$ e $\dim V = 10$ allora $\dim^\perp U = 18$.
 - D) su ogni spazio vettoriale euclideo esiste uno ed un solo prodotto scalare.

- 5) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- l'unione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 - l'insieme $\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 0), (1, 2, 3, 0)\}$ è una base per \mathbf{R}^4 .
 - l'insieme $\{(1, 1, 0, 1, 3), (1, 2, -1, 0, -2), (3, 1, 1, 3, -1), (4, 1, 3, 1, 0)\}$ è un insieme di generatori per \mathbf{R}^5 .
 - l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
- 6) Sia T una trasformazione lineare da uno spazio vettoriale U ad uno spazio vettoriale W , entrambi di dimensione finita. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- la funzione $2T$ è anch'essa una trasformazione lineare.
 - se $\dim(\ker T) = 0$ allora T è iniettiva.
 - T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
 - $\dim W = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T)$.
- 7) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
 - \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
- 8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato:
- se il punto P ha coordinate $(1, 3)$ e il punto Q ha coordinate $(7, 1)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(3, -1)$.
 - la conica di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ è un'ellisse.
 - la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e il punto di coordinate $(2, 1)$ è $\sqrt{2}$.
 - la distanza fra il punto di coordinate $(-1, 2)$ e l'asse delle y è 1.
- 9) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
- (\mathbf{C}, \cdot) (\mathbf{C} = insieme dei numeri complessi, \cdot = usuale prodotto di numeri complessi).
 - insieme delle matrici reali 3×3 ottenute moltiplicando la matrice identica per un qualunque numero reale, con l'usuale somma di matrici.
 - Insieme delle funzioni continue da \mathbf{R} in \mathbf{R} , con l'usuale somma di funzioni.
 - $(\mathbf{R}^7, +)$ (\mathbf{R}^7 = insieme delle 7-uple ordinate di numeri reali, $+$ = usuale somma di n -uple).

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato:
 - A) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e l'asse delle x è 5.
 - B) la conica di equazione $y = 4x^2$ è un'iperbole.
 - C) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 4)$ è $\sqrt{3}$.
 - D) le rette di equazioni cartesiane $2x - y = 0$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.

- 2) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se $m < n$ allora \mathbf{S} ammette ∞^{n-m} soluzioni.
 - B) se \mathbf{S} non ammette soluzioni allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
 - C) se $m = n$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 - D) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.

- 3) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
 - A) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ (\mathbf{Q} = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, \cdot = usuale prodotto di numeri razionali).
 - B) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - C) $(\mathbf{Z}, +)$ (\mathbf{Z} = insieme dei numeri interi, $+$ = usuale somma di numeri interi).
 - D) l'insieme \mathbf{Z}_5 delle classi di resto modulo 5, con le usuali operazioni di somma e prodotto.

- 4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - B) la molteplicità geometrica di un autovalore di T è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica.
 - C) se v è un autovettore di T allora esiste un λ tale che $T(v) = \lambda v$.
 - D) se A non è simmetrica allora V non può ammettere una base spettrale relativa a T .

- 5) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - B) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - C) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
 - D) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
- 6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) le trasformazioni ortogonali fra spazi vettoriali euclidei conservano le norme dei vettori.
 - B) due basi ordinate di uno spazio vettoriale euclideo si dicono discordi se la matrice del cambiamento di base dalla prima base alla seconda ha determinante negativo.
 - C) se due vettori u, v di uno spazio vettoriale euclideo sono ortogonali allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
 - D) per definizione, si dice versore ogni vettore dotato di verso.
- 7) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'unione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - B) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - C) l'insieme $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ è una base per \mathbf{R}^3 .
 - D) l'insieme delle settuple ordinate di numeri interi dispari è un insieme di generatori per \mathbf{R}^7 .
- 8) Siano A, B e C tre matrici reali invertibili $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) ${}^t(A \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = A \cdot B \cdot C$.
 - B) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
 - C) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
 - D) $\det(2A) = 2^n \det A$.
- 9) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $\det A = \rho(A)$.
 - B) T è iniettiva e suriettiva.
 - C) $\dim V = \rho(A)$.
 - D) $T \circ T$ è ancora un automorfismo di V .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Siano A , B e C tre matrici reali invertibili $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) ${}^t(A \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = A \cdot B \cdot C$.
 - B) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
 - C) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
 - D) $\det(2A) = 2^n \det A$.

- 2) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'unione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - B) l'insieme $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ è una base per \mathbf{R}^3 .
 - C) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - D) l'insieme delle settuple ordinate di numeri interi dispari è un insieme di generatori per \mathbf{R}^7 .

- 3) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - B) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
 - C) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - D) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .

- 4) Sia T una trasformazione lineare da uno spazio vettoriale U ad uno spazio vettoriale W , entrambi di dimensione finita. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
 - B) $\dim W = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T)$.
 - C) la funzione $2T$ è anch'essa una trasformazione lineare.
 - D) se $\dim(\ker T) = 0$ allora T è iniettiva.

- 5) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) il sistema ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
 - B) se \mathbf{S} è omogeneo ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se $n > \rho(C)$.
 - C) se $m = n + 1$ e $\det C = 0$ allora \mathbf{S} ammette almeno una soluzione.
 - D) se $m > n$ allora \mathbf{S} non ammette soluzioni.

- 6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se 0 è un autovalore di T allora T non è un isomorfismo.
 - B) λ è un autovalore di T se e solo se è una radice del suo polinomio caratteristico.
 - C) se $\det(\lambda I - A) = 0$ per un certo numero reale λ allora V ammette una base spettrale relativa a T .
 - D) se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
- 7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) le trasformazioni ortogonali fra spazi vettoriali euclidei conservano le norme dei vettori.
 - B) se due vettori u, v di uno spazio vettoriale euclideo sono ortogonali allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
 - C) per definizione, si dice versore ogni vettore dotato di verso.
 - D) due basi ordinate di uno spazio vettoriale euclideo si dicono discordi se la matrice del cambiamento di base dalla prima base alla seconda ha determinante negativo.
- 8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato:
- A) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e l'asse delle x è 5 .
 - B) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 4)$ è $\sqrt{3}$.
 - C) le rette di equazioni cartesiane $2x - y = 0$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
 - D) la conica di equazione $y = 4x^2$ è un'iperbole.
- 9) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
- A) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ (\mathbf{Q} = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, \cdot = usuale prodotto di numeri razionali).
 - B) $(\mathbf{Z}, +)$ (\mathbf{Z} = insieme dei numeri interi, $+$ = usuale somma di numeri interi).
 - C) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - D) l'insieme \mathbf{Z}_5 delle classi di resto modulo 5 , con le usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette una base ortonormale.
 - B) l'insieme $\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, -2, 1)\}$ è una base ortogonale per lo spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale.
 - C) su ogni spazio vettoriale euclideo esiste uno ed un solo prodotto scalare.
 - D) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V con $\dim U = 8$ e $\dim V = 10$ allora $\dim^\perp U = 18$.

- 2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se v è un autovettore di T allora esiste un λ tale che $T(v) = \lambda v$.
 - B) se A non è simmetrica allora V non può ammettere una base spettrale relativa a T .
 - C) la molteplicità geometrica di un autovalore di T è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica.
 - D) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.

- 3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) $\det(A + 3B + 5C) = \det A + 3 \det B + 5 \det C$.
 - B) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
 - C) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(A \cdot {}^t B \cdot C)$.
 - D) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.

- 4) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
 - A) Insieme delle funzioni continue da \mathbf{R} in \mathbf{R} , con l'usuale somma di funzioni.
 - B) $(\mathbf{R}^7, +)$ (\mathbf{R}^7 = insieme delle 7-uple ordinate di numeri reali, $+$ = usuale somma di n -uple).
 - C) insieme delle matrici reali 3×3 ottenute moltiplicando la matrice identica per un qualunque numero reale, con l'usuale somma di matrici.
 - D) (\mathbf{C}, \cdot) (\mathbf{C} = insieme dei numeri complessi, \cdot = usuale prodotto di numeri complessi).

- 5) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 B) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 C) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 D) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
- 6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato:
- A) la conica di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ è un'ellisse.
 B) se il punto P ha coordinate $(1, 3)$ e il punto Q ha coordinate $(7, 1)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(3, -1)$.
 C) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, 2)$ e l'asse delle y è 1.
 D) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e il punto di coordinate $(2, 1)$ è $\sqrt{2}$.
- 7) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $\dim V = \rho(A)$.
 B) $T \circ T$ è ancora un automorfismo di V .
 C) T è iniettiva e suriettiva.
 D) $\det A = \rho(A)$.
- 8) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme $\{(1, 1, 0, 1, 3), (1, 2, -1, 0, -2), (3, 1, 1, 3, -1), (4, 1, 3, 1, 0)\}$ è un insieme di generatori per \mathbf{R}^5 .
 B) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 C) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 0), (1, 2, 3, 0)\}$ è una base per \mathbf{R}^4 .
 D) l'unione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
- 9) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se $m = n$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 B) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 C) se \mathbf{S} non ammette soluzioni allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
 D) se $m < n$ allora \mathbf{S} ammette ∞^{n-m} soluzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Siano A , B e C tre matrici reali invertibili $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
 - B) $\det(2A) = 2^n \det A$.
 - C) ${}^t(A \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = A \cdot B \cdot C$.
 - D) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.

- 2) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - B) l'insieme delle settuple ordinate di numeri interi dispari è un insieme di generatori per \mathbf{R}^7 .
 - C) l'unione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - D) l'insieme $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ è una base per \mathbf{R}^3 .

- 3) Sia T una trasformazione lineare da uno spazio vettoriale U ad uno spazio vettoriale W , entrambi di dimensione finita. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
 - B) se $\dim(\ker T) = 0$ allora T è iniettiva.
 - C) $\dim W = \dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T)$.
 - D) la funzione $2T$ è anch'essa una trasformazione lineare.

- 4) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) il sistema ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
 - B) se $m > n$ allora \mathbf{S} non ammette soluzioni.
 - C) se \mathbf{S} è omogeneo ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se $n > \rho(C)$.
 - D) se $m = n + 1$ e $\det C = 0$ allora \mathbf{S} ammette almeno una soluzione.

- 5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato:
 - A) se il punto P ha coordinate $(1, 3)$ e il punto Q ha coordinate $(7, 1)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(3, -1)$.
 - B) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e il punto di coordinate $(2, 1)$ è $\sqrt{2}$.
 - C) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, 2)$ e l'asse delle y è 1.
 - D) la conica di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ è un'ellisse.

- 6) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
- A) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - B) l'insieme \mathbf{Z}_5 delle classi di resto modulo 5, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - C) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ (\mathbf{Q} = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, \cdot = usuale prodotto di numeri razionali).
 - D) $(\mathbf{Z}, +)$ (\mathbf{Z} = insieme dei numeri interi, $+$ = usuale somma di numeri interi).
- 7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se 0 è un autovalore di T allora T non è un isomorfismo.
 - B) se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - C) λ è un autovalore di T se e solo se è una radice del suo polinomio caratteristico.
 - D) se $\det(\lambda I - A) = 0$ per un certo numero reale λ allora V ammette una base spettrale relativa a T .
- 8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme $\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, -2, 1)\}$ è una base ortogonale per lo spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale.
 - B) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V con $\dim U = 8$ e $\dim V = 10$ allora $\dim^\perp U = 18$.
 - C) su ogni spazio vettoriale euclideo esiste uno ed un solo prodotto scalare.
 - D) ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette una base ortonormale.
- 9) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica
- $$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$$
- rispetto al riferimento cartesiano naturale. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - B) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
 - C) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - D) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 - B) se \mathbf{S} non ammette soluzioni allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
 - C) se $m < n$ allora \mathbf{S} ammette ∞^{n-m} soluzioni.
 - D) se $m = n$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.

- 2) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - B) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - C) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - D) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .

- 3) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
 - A) insieme delle matrici reali 3×3 ottenute moltiplicando la matrice identica per un qualunque numero reale, con l'usuale somma di matrici.
 - B) Insieme delle funzioni continue da \mathbf{R} in \mathbf{R} , con l'usuale somma di funzioni.
 - C) (\mathbf{C}, \cdot) (\mathbf{C} = insieme dei numeri complessi, \cdot = usuale prodotto di numeri complessi).
 - D) $(\mathbf{R}^7, +)$ (\mathbf{R}^7 = insieme delle 7-uple ordinate di numeri reali, $+$ = usuale somma di n -uple).

- 4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato:
 - A) la conica di equazione $y = 4x^2$ è un'iperbole.
 - B) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e l'asse delle x è 5.
 - C) le rette di equazioni cartesiane $2x - y = 0$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
 - D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 4)$ è $\sqrt{3}$.

- 5) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 0), (1, 2, 3, 0)\}$ è una base per \mathbf{R}^4 .
 - B) l'insieme $\{(1, 1, 0, 1, 3), (1, 2, -1, 0, -2), (3, 1, 1, 3, -1), (4, 1, 3, 1, 0)\}$ è un insieme di generatori per \mathbf{R}^5 .
 - C) l'unione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 - D) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.

- 6) Siano A , B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(A \cdot {}^tB \cdot C)$.
 - B) $\det(A + 3B + 5C) = \det A + 3 \det B + 5 \det C$.
 - C) $\text{Tr}(A + B + C) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) + \text{Tr}(C)$.
 - D) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
- 7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se A non è simmetrica allora V non può ammettere una base spettrale relativa a T .
 - B) la molteplicità geometrica di un autovalore di T è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica.
 - C) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - D) se v è un autovettore di T allora esiste un λ tale che $T(v) = \lambda v$.
- 8) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $T \circ T$ è ancora un automorfismo di V .
 - B) T è iniettiva e suriettiva.
 - C) $\det A = \rho(A)$.
 - D) $\dim V = \rho(A)$.
- 9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) due basi ordinate di uno spazio vettoriale euclideo si dicono discordi se la matrice del cambiamento di base dalla prima base alla seconda ha determinante negativo.
 - B) le trasformazioni ortogonali fra spazi vettoriali euclidei conservano le norme dei vettori.
 - C) per definizione, si dice versore ogni vettore dotato di verso.
 - D) se due vettori u , v di uno spazio vettoriale euclideo sono ortogonali allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme $\{(1, 1, 0, 1, 3), (1, 2, -1, 0, -2), (3, 1, 1, 3, -1), (4, 1, 3, 1, 0)\}$ è un insieme di generatori per \mathbf{R}^5 .
 - B) l'unione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 - C) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 - D) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 0), (1, 2, 3, 0)\}$ è una base per \mathbf{R}^4 .

- 2) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - B) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - C) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - D) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .

- 3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato:
 - A) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e l'asse delle x è 5.
 - B) le rette di equazioni cartesiane $2x - y = 0$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
 - C) la conica di equazione $y = 4x^2$ è un'iperbole.
 - D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 4)$ è $\sqrt{3}$.

- 4) Sia T una trasformazione lineare da uno spazio vettoriale U ad uno spazio vettoriale W , entrambi di dimensione finita. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) la funzione $2T$ è anch'essa una trasformazione lineare.
 - B) se $\dim(\ker T) = 0$ allora T è iniettiva.
 - C) $\dim W = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T)$.
 - D) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

- 5) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se $m = n + 1$ e $\det C = 0$ allora \mathbf{S} ammette almeno una soluzione.
 - B) se $m > n$ allora \mathbf{S} non ammette soluzioni.
 - C) se \mathbf{S} è omogeneo ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se $n > \rho(C)$.
 - D) il sistema ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

- 6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se $\det(\lambda I - A) = 0$ per un certo numero reale λ allora V ammette una base spettrale relativa a T .
 - B) se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - C) λ è un autovalore di T se e solo se è una radice del suo polinomio caratteristico.
 - D) se 0 è un autovalore di T allora T non è un isomorfismo.
- 7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) le trasformazioni ortogonali fra spazi vettoriali euclidei conservano le norme dei vettori.
 - B) per definizione, si dice versore ogni vettore dotato di verso.
 - C) due basi ordinate di uno spazio vettoriale euclideo si dicono discordi se la matrice del cambiamento di base dalla prima base alla seconda ha determinante negativo.
 - D) se due vettori u, v di uno spazio vettoriale euclideo sono ortogonali allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
- 8) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
- A) Insieme delle funzioni continue da \mathbf{R} in \mathbf{R} , con l'usuale somma di funzioni.
 - B) (\mathbf{C}, \cdot) (\mathbf{C} = insieme dei numeri complessi, \cdot = usuale prodotto di numeri complessi).
 - C) $(\mathbf{R}^7, +)$ (\mathbf{R}^7 = insieme delle 7-uple ordinate di numeri reali, $+$ = usuale somma di n -uple).
 - D) insieme delle matrici reali 3×3 ottenute moltiplicando la matrice identica per un qualunque numero reale, con l'usuale somma di matrici.
- 9) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $\det(A + 3B + 5C) = \det A + 3 \det B + 5 \det C$.
 - B) $\text{Tr}(A + B + C) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) + \text{Tr}(C)$.
 - C) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
 - D) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(A \cdot {}^t B \cdot C)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - B) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - C) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
 - D) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
- 2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette una base ortonormale.
 - B) su ogni spazio vettoriale euclideo esiste uno ed un solo prodotto scalare.
 - C) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V con $\dim U = 8$ e $\dim V = 10$ allora $\dim^\perp U = 18$.
 - D) l'insieme $\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, -2, 1)\}$ è una base ortogonale per lo spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale.
- 3) Siano A , B e C tre matrici reali invertibili $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $\det(2A) = 2^n \det A$.
 - B) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
 - C) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
 - D) ${}^t({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = A \cdot B \cdot C$.
- 4) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
- A) l'insieme \mathbf{Z}_5 delle classi di resto modulo 5, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - B) $(\mathbf{Z}, +)$ (\mathbf{Z} = insieme dei numeri interi, $+$ = usuale somma di numeri interi).
 - C) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - D) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ (\mathbf{Q} = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, \cdot = usuale prodotto di numeri razionali).

- 5) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme delle settuple ordinate di numeri interi dispari è un insieme di generatori per \mathbf{R}^7 .
 - B) l'insieme $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ è una base per \mathbf{R}^3 .
 - C) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - D) l'unione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
- 6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se v è un autovettore di T allora esiste un λ tale che $T(v) = \lambda v$.
 - B) se A non è simmetrica allora V non può ammettere una base spettrale relativa a T .
 - C) la molteplicità geometrica di un autovalore di T è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica.
 - D) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.
- 7) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se $m = n$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 - B) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 - C) se \mathbf{S} non ammette soluzioni allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
 - D) se $m < n$ allora \mathbf{S} ammette ∞^{n-m} soluzioni.
- 8) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $\dim V = \rho(A)$.
 - B) $T \circ T$ è ancora un automorfismo di V .
 - C) T è iniettiva e suriettiva.
 - D) $\det A = \rho(A)$.
- 9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato:
- A) la conica di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ è un'ellisse.
 - B) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, 2)$ e l'asse delle y è 1.
 - C) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e il punto di coordinate $(2, 1)$ è $\sqrt{2}$.
 - D) se il punto P ha coordinate $(1, 3)$ e il punto Q ha coordinate $(7, 1)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(3, -1)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia T una trasformazione lineare da uno spazio vettoriale U ad uno spazio vettoriale W , entrambi di dimensione finita. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) la funzione $2T$ è anch'essa una trasformazione lineare.
 - B) $\dim W = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T)$.
 - C) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
 - D) se $\dim(\ker T) = 0$ allora T è iniettiva.

- 2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se $\det(\lambda I - A) = 0$ per un certo numero reale λ allora V ammette una base spettrale relativa a T .
 - B) λ è un autovalore di T se e solo se è una radice del suo polinomio caratteristico.
 - C) se 0 è un autovalore di T allora T non è un isomorfismo.
 - D) se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.

- 3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme $\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, -2, 1)\}$ è una base ortogonale per lo spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale.
 - B) ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette una base ortonormale.
 - C) su ogni spazio vettoriale euclideo esiste uno ed un solo prodotto scalare.
 - D) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V con $\dim U = 8$ e $\dim V = 10$ allora $\dim^\perp U = 18$.

- 4) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se $m = n + 1$ e $\det C = 0$ allora \mathbf{S} ammette almeno una soluzione.
 - B) se \mathbf{S} è omogeneo ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se $n > \rho(C)$.
 - C) il sistema ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
 - D) se $m > n$ allora \mathbf{S} non ammette soluzioni.

- 5) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - B) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - C) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - D) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
- 6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato:
- A) se il punto P ha coordinate $(1, 3)$ e il punto Q ha coordinate $(7, 1)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(3, -1)$.
 - B) la conica di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ è un'ellisse.
 - C) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, 2)$ e l'asse delle y è 1.
 - D) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e il punto di coordinate $(2, 1)$ è $\sqrt{2}$.
- 7) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
- A) (\mathbf{C}, \cdot) (\mathbf{C} = insieme dei numeri complessi, \cdot = usuale prodotto di numeri complessi).
 - B) $(\mathbf{R}^7, +)$ (\mathbf{R}^7 = insieme delle 7-uple ordinate di numeri reali, $+$ = usuale somma di n -uple).
 - C) Insieme delle funzioni continue da \mathbf{R} in \mathbf{R} , con l'usuale somma di funzioni.
 - D) insieme delle matrici reali 3×3 ottenute moltiplicando la matrice identica per un qualunque numero reale, con l'usuale somma di matrici.
- 8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
 - B) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
 - C) $\det(A + 3B + 5C) = \det A + 3 \det B + 5 \det C$.
 - D) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(A \cdot {}^t B \cdot C)$.
- 9) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'unione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 - B) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 - C) l'insieme $\{(1, 1, 0, 1, 3), (1, 2, -1, 0, -2), (3, 1, 1, 3, -1), (4, 1, 3, 1, 0)\}$ è un insieme di generatori per \mathbf{R}^5 .
 - D) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 0), (1, 2, 3, 0)\}$ è una base per \mathbf{R}^4 .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Siano A , B e C tre matrici reali invertibili $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
 - B) $\det(2A) = 2^n \det A$.
 - C) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
 - D) ${}^t(A \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = A \cdot B \cdot C$.

- 2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se v è un autovettore di T allora esiste un λ tale che $T(v) = \lambda v$.
 - B) se A non è simmetrica allora V non può ammettere una base spettrale relativa a T .
 - C) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - D) la molteplicità geometrica di un autovalore di T è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica.

- 3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) le trasformazioni ortogonali fra spazi vettoriali euclidei conservano le norme dei vettori.
 - B) per definizione, si dice versore ogni vettore dotato di verso.
 - C) se due vettori u , v di uno spazio vettoriale euclideo sono ortogonali allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
 - D) due basi ordinate di uno spazio vettoriale euclideo si dicono discordi se la matrice del cambiamento di base dalla prima base alla seconda ha determinante negativo.

- 4) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - B) l'insieme delle settuple ordinate di numeri interi dispari è un insieme di generatori per \mathbf{R}^7 .
 - C) l'insieme $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ è una base per \mathbf{R}^3 .
 - D) l'unione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.

- 5) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
- A) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - B) l'insieme \mathbf{Z}_5 delle classi di resto modulo 5, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - C) $(\mathbf{Z}, +)$ (\mathbf{Z} = insieme dei numeri interi, $+$ = usuale somma di numeri interi).
 - D) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ (\mathbf{Q} = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, \cdot = usuale prodotto di numeri razionali).
- 6) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - B) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - C) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
 - D) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
- 7) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se $m = n$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 - B) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 - C) se $m < n$ allora \mathbf{S} ammette ∞^{n-m} soluzioni.
 - D) se \mathbf{S} non ammette soluzioni allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
- 8) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $\dim V = \rho(A)$.
 - B) $T \circ T$ è ancora un automorfismo di V .
 - C) $\det A = \rho(A)$.
 - D) T è iniettiva e suriettiva.
- 9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato:
- A) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e l'asse delle x è 5.
 - B) le rette di equazioni cartesiane $2x - y = 0$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
 - C) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 4)$ è $\sqrt{3}$.
 - D) la conica di equazione $y = 4x^2$ è un'iperbole.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ è una base per \mathbf{R}^3 .
 - B) l'unione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - C) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - D) l'insieme delle settuple ordinate di numeri interi dispari è un insieme di generatori per \mathbf{R}^7 .
- 2) Sia T una trasformazione lineare da uno spazio vettoriale U ad uno spazio vettoriale W , entrambi di dimensione finita. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se $\dim(\ker T) = 0$ allora T è iniettiva.
 - B) la funzione $2T$ è anch'essa una trasformazione lineare.
 - C) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
 - D) $\dim W = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T)$.
- 3) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se $m > n$ allora \mathbf{S} non ammette soluzioni.
 - B) se $m = n + 1$ e $\det C = 0$ allora \mathbf{S} ammette almeno una soluzione.
 - C) il sistema ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
 - D) se \mathbf{S} è omogeneo ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se $n > \rho(C)$.
- 4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - B) se $\det(\lambda I - A) = 0$ per un certo numero reale λ allora V ammette una base spettrale relativa a T .
 - C) se 0 è un autovalore di T allora T non è un isomorfismo.
 - D) λ è un autovalore di T se e solo se è una radice del suo polinomio caratteristico.
- 5) Siano A , B e C tre matrici reali invertibili $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
 - B) ${}^t(A \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = A \cdot B \cdot C$.
 - C) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
 - D) $\det(2A) = 2^n \det A$.

- 6) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - B) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - C) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - D) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
- 7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato:
- A) la conica di equazione $y = 4x^2$ è un'iperbole.
 - B) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e l'asse delle x è 5.
 - C) le rette di equazioni cartesiane $2x - y = 0$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
 - D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 4)$ è $\sqrt{3}$.
- 8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) due basi ordinate di uno spazio vettoriale euclideo si dicono discordi se la matrice del cambiamento di base dalla prima base alla seconda ha determinante negativo.
 - B) le trasformazioni ortogonali fra spazi vettoriali euclidei conservano le norme dei vettori.
 - C) per definizione, si dice versore ogni vettore dotato di verso.
 - D) se due vettori u, v di uno spazio vettoriale euclideo sono ortogonali allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
- 9) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
- A) $(\mathbf{Z}, +)$ (\mathbf{Z} = insieme dei numeri interi, $+$ = usuale somma di numeri interi).
 - B) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ (\mathbf{Q} = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, \cdot = usuale prodotto di numeri razionali).
 - C) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - D) l'insieme \mathbf{Z}_5 delle classi di resto modulo 5, con le usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - B) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - C) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
 - D) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
- 2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme $\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, -2, 1)\}$ è una base ortogonale per lo spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale.
 - B) su ogni spazio vettoriale euclideo esiste uno ed un solo prodotto scalare.
 - C) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V con $\dim U = 8$ e $\dim V = 10$ allora $\dim^\perp U = 18$.
 - D) ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette una base ortonormale.
- 3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
 - B) $\text{Tr}(A + B + C) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) + \text{Tr}(C)$.
 - C) $\det(A + 3B + 5C) = \det A + 3 \det B + 5 \det C$.
 - D) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(A \cdot {}^t B \cdot C)$.
- 4) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
- A) $(\mathbf{R}^7, +)$ (\mathbf{R}^7 = insieme delle 7-uple ordinate di numeri reali, $+$ = usuale somma di n -uple).
 - B) (\mathbf{C}, \cdot) (\mathbf{C} = insieme dei numeri complessi, \cdot = usuale prodotto di numeri complessi).
 - C) Insieme delle funzioni continue da \mathbf{R} in \mathbf{R} , con l'usuale somma di funzioni.
 - D) insieme delle matrici reali 3×3 ottenute moltiplicando la matrice identica per un qualunque numero reale, con l'usuale somma di matrici.
- 5) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $\det A = \rho(A)$.
 - B) T è iniettiva e suriettiva.
 - C) $\dim V = \rho(A)$.
 - D) $T \circ T$ è ancora un automorfismo di V .

- 6) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 - B) l'unione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 - C) l'insieme $\{(1, 1, 0, 1, 3), (1, 2, -1, 0, -2), (3, 1, 1, 3, -1), (4, 1, 3, 1, 0)\}$ è un insieme di generatori per \mathbf{R}^5 .
 - D) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 0), (1, 2, 3, 0)\}$ è una base per \mathbf{R}^4 .
- 7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato:
- A) se il punto P ha coordinate $(1, 3)$ e il punto Q ha coordinate $(7, 1)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(3, -1)$.
 - B) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, 2)$ e l'asse delle y è 1.
 - C) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e il punto di coordinate $(2, 1)$ è $\sqrt{2}$.
 - D) la conica di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ è un'ellisse.
- 8) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se $m < n$ allora \mathbf{S} ammette ∞^{n-m} soluzioni.
 - B) se \mathbf{S} non ammette soluzioni allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
 - C) se $m = n$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 - D) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
- 9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - B) la molteplicità geometrica di un autovalore di T è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica.
 - C) se v è un autovettore di T allora esiste un λ tale che $T(v) = \lambda v$.
 - D) se A non è simmetrica allora V non può ammettere una base spettrale relativa a T .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia T una trasformazione lineare da uno spazio vettoriale U ad uno spazio vettoriale W , entrambi di dimensione finita. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
 - B) se $\dim(\ker T) = 0$ allora T è iniettiva.
 - C) la funzione $2T$ è anch'essa una trasformazione lineare.
 - D) $\dim W = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T)$.
- 2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette una base ortonormale.
 - B) l'insieme $\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, -2, 1)\}$ è una base ortogonale per lo spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale.
 - C) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V con $\dim U = 8$ e $\dim V = 10$ allora $\dim^\perp U = 18$.
 - D) su ogni spazio vettoriale euclideo esiste uno ed un solo prodotto scalare.
- 3) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) il sistema ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
 - B) se $m > n$ allora \mathbf{S} non ammette soluzioni.
 - C) se $m = n + 1$ e $\det C = 0$ allora \mathbf{S} ammette almeno una soluzione.
 - D) se \mathbf{S} è omogeneo ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se $n > \rho(C)$.
- 4) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica
- $$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$$
- rispetto al riferimento cartesiano naturale. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - B) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - C) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
 - D) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .

- 5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato:
- A) la conica di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ è un'ellisse.
 - B) se il punto P ha coordinate $(1, 3)$ e il punto Q ha coordinate $(7, 1)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(3, -1)$.
 - C) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e il punto di coordinate $(2, 1)$ è $\sqrt{2}$.
 - D) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, 2)$ e l'asse delle y è 1.
- 6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se 0 è un autovalore di T allora T non è un isomorfismo.
 - B) se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - C) se $\det(\lambda I - A) = 0$ per un certo numero reale λ allora V ammette una base spettrale relativa a T .
 - D) λ è un autovalore di T se e solo se è una radice del suo polinomio caratteristico.
- 7) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
- A) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ (\mathbf{Q} = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, \cdot = usuale prodotto di numeri razionali).
 - B) $(\mathbf{Z}, +)$ (\mathbf{Z} = insieme dei numeri interi, $+$ = usuale somma di numeri interi).
 - C) l'insieme \mathbf{Z}_5 delle classi di resto modulo 5, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - D) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
- 8) Siano A, B e C tre matrici reali invertibili $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) ${}^t({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = A \cdot B \cdot C$.
 - B) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
 - C) $\det(2A) = 2^n \det A$.
 - D) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
- 9) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'unione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - B) l'insieme $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ è una base per \mathbf{R}^3 .
 - C) l'insieme delle settuple ordinate di numeri interi dispari è un insieme di generatori per \mathbf{R}^7 .
 - D) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
 - A) (\mathbf{C}, \cdot) (\mathbf{C} = insieme dei numeri complessi, \cdot = usuale prodotto di numeri complessi).
 - B) Insieme delle funzioni continue da \mathbf{R} in \mathbf{R} , con l'usuale somma di funzioni.
 - C) insieme delle matrici reali 3×3 ottenute moltiplicando la matrice identica per un qualunque numero reale, con l'usuale somma di matrici.
 - D) $(\mathbf{R}^7, +)$ (\mathbf{R}^7 = insieme delle 7-uple ordinate di numeri reali, $+$ = usuale somma di n -uple).

- 2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - B) se v è un autovettore di T allora esiste un λ tale che $T(v) = \lambda v$.
 - C) la molteplicità geometrica di un autovalore di T è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica.
 - D) se A non è simmetrica allora V non può ammettere una base spettrale relativa a T .

- 3) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'unione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 - B) l'insieme $\{(1, 1, 0, 1, 3), (1, 2, -1, 0, -2), (3, 1, 1, 3, -1), (4, 1, 3, 1, 0)\}$ è un insieme di generatori per \mathbf{R}^5 .
 - C) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 0), (1, 2, 3, 0)\}$ è una base per \mathbf{R}^4 .
 - D) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.

- 4) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
 - B) $\det(A + 3B + 5C) = \det A + 3 \det B + 5 \det C$.
 - C) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(A \cdot {}^t B \cdot C)$.
 - D) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

- 5) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se $m < n$ allora \mathbf{S} ammette ∞^{n-m} soluzioni.
 - B) se $m = n$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 - C) se \mathbf{S} non ammette soluzioni allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
 - D) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
- 6) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $\det A = \rho(A)$.
 - B) $\dim V = \rho(A)$.
 - C) T è iniettiva e suriettiva.
 - D) $T \circ T$ è ancora un automorfismo di V .
- 7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se due vettori u, v di uno spazio vettoriale euclideo sono ortogonali allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
 - B) due basi ordinate di uno spazio vettoriale euclideo si dicono discordi se la matrice del cambiamento di base dalla prima base alla seconda ha determinante negativo.
 - C) le trasformazioni ortogonali fra spazi vettoriali euclidei conservano le norme dei vettori.
 - D) per definizione, si dice versore ogni vettore dotato di verso.
- 8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato:
- A) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 4)$ è $\sqrt{3}$.
 - B) la conica di equazione $y = 4x^2$ è un'iperbole.
 - C) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e l'asse delle x è 5.
 - D) le rette di equazioni cartesiane $2x - y = 0$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
- 9) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
 - B) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - C) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - D) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - B) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - C) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - D) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .

- 2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato:
 - A) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e l'asse delle x è 5.
 - B) la conica di equazione $y = 4x^2$ è un'iperbole.
 - C) le rette di equazioni cartesiane $2x - y = 0$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
 - D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 4)$ è $\sqrt{3}$.

- 3) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme $\{(1, 1, 0, 1, 3), (1, 2, -1, 0, -2), (3, 1, 1, 3, -1), (4, 1, 3, 1, 0)\}$ è un insieme di generatori per \mathbf{R}^5 .
 - B) l'unione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 - C) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 - D) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 0), (1, 2, 3, 0)\}$ è una base per \mathbf{R}^4 .

- 4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) λ è un autovalore di T se e solo se è una radice del suo polinomio caratteristico.
 - B) se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - C) se 0 è un autovalore di T allora T non è un isomorfismo.
 - D) se $\det(\lambda I - A) = 0$ per un certo numero reale λ allora V ammette una base spettrale relativa a T .

- 5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) le trasformazioni ortogonali fra spazi vettoriali euclidei conservano le norme dei vettori.
 - B) due basi ordinate di uno spazio vettoriale euclideo si dicono discordi se la matrice del cambiamento di base dalla prima base alla seconda ha determinante negativo.
 - C) per definizione, si dice versore ogni vettore dotato di verso.
 - D) se due vettori u, v di uno spazio vettoriale euclideo sono ortogonali allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
- 6) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
- A) Insieme delle funzioni continue da \mathbf{R} in \mathbf{R} , con l'usuale somma di funzioni.
 - B) (\mathbf{C}, \cdot) (\mathbf{C} = insieme dei numeri complessi, \cdot = usuale prodotto di numeri complessi).
 - C) $(\mathbf{R}^7, +)$ (\mathbf{R}^7 = insieme delle 7-uple ordinate di numeri reali, $+$ = usuale somma di n -uple).
 - D) insieme delle matrici reali 3×3 ottenute moltiplicando la matrice identica per un qualunque numero reale, con l'usuale somma di matrici.
- 7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $\det(A + 3B + 5C) = \det A + 3 \det B + 5 \det C$.
 - B) $\text{Tr}(A + B + C) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) + \text{Tr}(C)$.
 - C) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
 - D) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(A \cdot {}^t B \cdot C)$.
- 8) Sia T una trasformazione lineare da uno spazio vettoriale U ad uno spazio vettoriale W , entrambi di dimensione finita. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $\dim W = \dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T)$.
 - B) se $\dim(\ker T) = 0$ allora T è iniettiva.
 - C) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
 - D) la funzione $2T$ è anch'essa una trasformazione lineare.
- 9) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se \mathbf{S} è omogeneo ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se $n > \rho(C)$.
 - B) se $m > n$ allora \mathbf{S} non ammette soluzioni.
 - C) il sistema ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
 - D) se $m = n + 1$ e $\det C = 0$ allora \mathbf{S} ammette almeno una soluzione.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) T è iniettiva e suriettiva.
 - B) $T \circ T$ è ancora un automorfismo di V .
 - C) $\det A = \rho(A)$.
 - D) $\dim V = \rho(A)$.

- 2) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
 - A) $(\mathbf{Z}, +)$ (\mathbf{Z} = insieme dei numeri interi, $+$ = usuale somma di numeri interi).
 - B) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ (\mathbf{Q} = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, \cdot = usuale prodotto di numeri razionali).
 - C) l'insieme \mathbf{Z}_5 delle classi di resto modulo 5, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - D) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto.

- 3) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) la molteplicità geometrica di un autovalore di T è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica.
 - B) se A non è simmetrica allora V non può ammettere una base spettrale relativa a T .
 - C) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - D) se v è un autovettore di T allora esiste un λ tale che $T(v) = \lambda v$.

- 4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato:
 - A) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, 2)$ e l'asse delle y è 1.
 - B) se il punto P ha coordinate $(1, 3)$ e il punto Q ha coordinate $(7, 1)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(3, -1)$.
 - C) la conica di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ è un'ellisse.
 - D) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e il punto di coordinate $(2, 1)$ è $\sqrt{2}$.

- 5) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ è una base per \mathbf{R}^3 .
 - B) l'unione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - C) l'insieme delle settuple ordinate di numeri interi dispari è un insieme di generatori per \mathbf{R}^7 .
 - D) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
- 6) Siano A, B e C tre matrici reali invertibili $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
 - B) ${}^t({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = A \cdot B \cdot C$.
 - C) $\det(2A) = 2^n \det A$.
 - D) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
- 7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) su ogni spazio vettoriale euclideo esiste uno ed un solo prodotto scalare.
 - B) l'insieme $\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, -2, 1)\}$ è una base ortogonale per lo spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale.
 - C) ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette una base ortonormale.
 - D) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V con $\dim U = 8$ e $\dim V = 10$ allora $\dim^\perp U = 18$.
- 8) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se \mathbf{S} non ammette soluzioni allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
 - B) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 - C) se $m < n$ allora \mathbf{S} ammette ∞^{n-m} soluzioni.
 - D) se $m = n$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
- 9) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica
- $$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$$
- rispetto al riferimento cartesiano naturale. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - B) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - C) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - D) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia T una trasformazione lineare da uno spazio vettoriale U ad uno spazio vettoriale W , entrambi di dimensione finita. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
 - B) $\dim W = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T)$.
 - C) se $\dim(\ker T) = 0$ allora T è iniettiva.
 - D) la funzione $2T$ è anch'essa una trasformazione lineare.

- 2) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) il sistema ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
 - B) se \mathbf{S} è omogeneo ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se $n > \rho(C)$.
 - C) se $m > n$ allora \mathbf{S} non ammette soluzioni.
 - D) se $m = n + 1$ e $\det C = 0$ allora \mathbf{S} ammette almeno una soluzione.

- 3) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$$
 rispetto al riferimento cartesiano naturale. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - B) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - C) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
 - D) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .

- 4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato:
 - A) se il punto P ha coordinate $(1, 3)$ e il punto Q ha coordinate $(7, 1)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(3, -1)$.
 - B) la conica di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ è un'ellisse.
 - C) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e il punto di coordinate $(2, 1)$ è $\sqrt{2}$.
 - D) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, 2)$ e l'asse delle y è 1.

- 5) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se 0 è un autovalore di T allora T non è un isomorfismo.
 - B) λ è un autovalore di T se e solo se è una radice del suo polinomio caratteristico.
 - C) se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - D) se $\det(\lambda I - A) = 0$ per un certo numero reale λ allora V ammette una base spettrale relativa a T .
- 6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme $\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, -2, 1)\}$ è una base ortogonale per lo spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale.
 - B) ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette una base ortonormale.
 - C) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V con $\dim U = 8$ e $\dim V = 10$ allora $\dim^\perp U = 18$.
 - D) su ogni spazio vettoriale euclideo esiste uno ed un solo prodotto scalare.
- 7) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
- A) (\mathbf{C}, \cdot) (\mathbf{C} = insieme dei numeri complessi, \cdot = usuale prodotto di numeri complessi).
 - B) $(\mathbf{R}^7, +)$ (\mathbf{R}^7 = insieme delle 7-uple ordinate di numeri reali, $+$ = usuale somma di n -uple).
 - C) insieme delle matrici reali 3×3 ottenute moltiplicando la matrice identica per un qualunque numero reale, con l'usuale somma di matrici.
 - D) Insieme delle funzioni continue da \mathbf{R} in \mathbf{R} , con l'usuale somma di funzioni.
- 8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $\text{Tr}(A + B + C) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) + \text{Tr}(C)$.
 - B) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
 - C) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(A \cdot {}^t B \cdot C)$.
 - D) $\det(A + 3B + 5C) = \det A + 3 \det B + 5 \det C$.
- 9) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'unione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 - B) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 - C) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 0), (1, 2, 3, 0)\}$ è una base per \mathbf{R}^4 .
 - D) l'insieme $\{(1, 1, 0, 1, 3), (1, 2, -1, 0, -2), (3, 1, 1, 3, -1), (4, 1, 3, 1, 0)\}$ è un insieme di generatori per \mathbf{R}^5 .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Siano A , B e C tre matrici reali invertibili $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) $\det(2A) = 2^n \det A$.
 - B) ${}^t(A \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = A \cdot B \cdot C$.
 - C) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
 - D) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.

- 2) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
 - A) l'insieme \mathbf{Z}_5 delle classi di resto modulo 5, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - B) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ (\mathbf{Q} = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, \cdot = usuale prodotto di numeri razionali).
 - C) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - D) $(\mathbf{Z}, +)$ (\mathbf{Z} = insieme dei numeri interi, $+$ = usuale somma di numeri interi).

- 3) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme delle settuple ordinate di numeri interi dispari è un insieme di generatori per \mathbf{R}^7 .
 - B) l'unione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - C) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - D) l'insieme $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ è una base per \mathbf{R}^3 .

- 4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) le trasformazioni ortogonali fra spazi vettoriali euclidei conservano le norme dei vettori.
 - B) per definizione, si dice versore ogni vettore dotato di verso.
 - C) due basi ordinate di uno spazio vettoriale euclideo si dicono discordi se la matrice del cambiamento di base dalla prima base alla seconda ha determinante negativo.
 - D) se due vettori u, v di uno spazio vettoriale euclideo sono ortogonali allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.

- 5) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se $m < n$ allora \mathbf{S} ammette ∞^{n-m} soluzioni.
 - B) se \mathbf{S} non ammette soluzioni allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
 - C) se $m = n$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 - D) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.

- 6) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $\det A = \rho(A)$.
 - B) T è iniettiva e suriettiva.
 - C) $\dim V = \rho(A)$.
 - D) $T \circ T$ è ancora un automorfismo di V .
- 7) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - B) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - C) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - D) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
- 8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato:
- A) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e l'asse delle x è 5.
 - B) le rette di equazioni cartesiane $2x - y = 0$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
 - C) la conica di equazione $y = 4x^2$ è un'iperbole.
 - D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 4)$ è $\sqrt{3}$.
- 9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - B) la molteplicità geometrica di un autovalore di T è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica.
 - C) se v è un autovettore di T allora esiste un λ tale che $T(v) = \lambda v$.
 - D) se A non è simmetrica allora V non può ammettere una base spettrale relativa a T .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) il sistema ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
 - B) se \mathbf{S} è omogeneo ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se $n > \rho(C)$.
 - C) se $m > n$ allora \mathbf{S} non ammette soluzioni.
 - D) se $m = n + 1$ e $\det C = 0$ allora \mathbf{S} ammette almeno una soluzione.

- 2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se 0 è un autovalore di T allora T non è un isomorfismo.
 - B) λ è un autovalore di T se e solo se è una radice del suo polinomio caratteristico.
 - C) se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - D) se $\det(\lambda I - A) = 0$ per un certo numero reale λ allora V ammette una base spettrale relativa a T .

- 3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) le trasformazioni ortogonali fra spazi vettoriali euclidei conservano le norme dei vettori.
 - B) due basi ordinate di uno spazio vettoriale euclideo si dicono discordi se la matrice del cambiamento di base dalla prima base alla seconda ha determinante negativo.
 - C) se due vettori u, v di uno spazio vettoriale euclideo sono ortogonali allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
 - D) per definizione, si dice versore ogni vettore dotato di verso.

- 4) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
 - A) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - B) l'insieme \mathbf{Z}_5 delle classi di resto modulo 5, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - C) $(\mathbf{Z}, +)$ (\mathbf{Z} = insieme dei numeri interi, $+$ = usuale somma di numeri interi).
 - D) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ (\mathbf{Q} = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, \cdot = usuale prodotto di numeri razionali).

- 5) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - B) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - C) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
 - D) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
- 6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato:
- A) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e l'asse delle x è 5.
 - B) la conica di equazione $y = 4x^2$ è un'iperbole.
 - C) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 4)$ è $\sqrt{3}$.
 - D) le rette di equazioni cartesiane $2x - y = 0$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
- 7) Siano A, B e C tre matrici reali invertibili $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
 - B) $\det(2A) = 2^n \det A$.
 - C) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
 - D) ${}^t({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = A \cdot B \cdot C$.
- 8) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - B) l'insieme delle settuple ordinate di numeri interi dispari è un insieme di generatori per \mathbf{R}^7 .
 - C) l'insieme $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ è una base per \mathbf{R}^3 .
 - D) l'unione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
- 9) Sia T una trasformazione lineare da uno spazio vettoriale U ad uno spazio vettoriale W , entrambi di dimensione finita. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
 - B) $\dim W = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T)$.
 - C) se $\dim(\ker T) = 0$ allora T è iniettiva.
 - D) la funzione $2T$ è anch'essa una trasformazione lineare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Siano A , B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) $\det(A + 3B + 5C) = \det A + 3 \det B + 5 \det C$.
 - B) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(A \cdot {}^t B \cdot C)$.
 - C) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
 - D) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.

- 2) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
 - A) Insieme delle funzioni continue da \mathbf{R} in \mathbf{R} , con l'usuale somma di funzioni.
 - B) insieme delle matrici reali 3×3 ottenute moltiplicando la matrice identica per un qualunque numero reale, con l'usuale somma di matrici.
 - C) $(\mathbf{R}^7, +)$ (\mathbf{R}^7 = insieme delle 7-uple ordinate di numeri reali, $+$ = usuale somma di n -uple).
 - D) (\mathbf{C}, \cdot) (\mathbf{C} = insieme dei numeri complessi, \cdot = usuale prodotto di numeri complessi).

- 3) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) T è iniettiva e suriettiva.
 - B) $\det A = \rho(A)$.
 - C) $T \circ T$ è ancora un automorfismo di V .
 - D) $\dim V = \rho(A)$.

- 4) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'insieme $\{(1, 1, 0, 1, 3), (1, 2, -1, 0, -2), (3, 1, 1, 3, -1), (4, 1, 3, 1, 0)\}$ è un insieme di generatori per \mathbf{R}^5 .
 - B) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 0), (1, 2, 3, 0)\}$ è una base per \mathbf{R}^4 .
 - C) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 - D) l'unione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.

- 5) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$$
 rispetto al riferimento cartesiano naturale. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - B) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - C) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - D) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .

- 6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette una base ortonormale.
 - B) su ogni spazio vettoriale euclideo esiste uno ed un solo prodotto scalare.
 - C) l'insieme $\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, -2, 1)\}$ è una base ortogonale per lo spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale.
 - D) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V con $\dim U = 8$ e $\dim V = 10$ allora $\dim^\perp U = 18$.
- 7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) la molteplicità geometrica di un autovalore di T è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica.
 - B) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - C) se A non è simmetrica allora V non può ammettere una base spettrale relativa a T .
 - D) se v è un autovettore di T allora esiste un λ tale che $T(v) = \lambda v$.
- 8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato:
- A) la conica di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ è un'ellisse.
 - B) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, 2)$ e l'asse delle y è 1.
 - C) se il punto P ha coordinate $(1, 3)$ e il punto Q ha coordinate $(7, 1)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(3, -1)$.
 - D) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e il punto di coordinate $(2, 1)$ è $\sqrt{2}$.
- 9) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se \mathbf{S} non ammette soluzioni allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
 - B) se $m < n$ allora \mathbf{S} ammette ∞^{n-m} soluzioni.
 - C) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 - D) se $m = n$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) su ogni spazio vettoriale euclideo esiste uno ed un solo prodotto scalare.
 - B) l'insieme $\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, -2, 1)\}$ è una base ortogonale per lo spazio vettoriale euclideo standard 3-dimensionale.
 - C) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V con $\dim U = 8$ e $\dim V = 10$ allora $\dim^\perp U = 18$.
 - D) ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette una base ortonormale.

- 2) Sia T una trasformazione lineare da uno spazio vettoriale U ad uno spazio vettoriale W , entrambi di dimensione finita. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se $\dim(\ker T) = 0$ allora T è iniettiva.
 - B) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
 - C) $\dim W = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T)$.
 - D) la funzione $2T$ è anch'essa una trasformazione lineare.

- 3) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se $m > n$ allora \mathbf{S} non ammette soluzioni.
 - B) il sistema ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
 - C) se \mathbf{S} è omogeneo ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se $n > \rho(C)$.
 - D) se $m = n + 1$ e $\det C = 0$ allora \mathbf{S} ammette almeno una soluzione.

- 4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato:
 - A) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, 2)$ e l'asse delle y è 1.
 - B) se il punto P ha coordinate $(1, 3)$ e il punto Q ha coordinate $(7, 1)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(3, -1)$.
 - C) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e il punto di coordinate $(2, 1)$ è $\sqrt{2}$.
 - D) la conica di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ è un'ellisse.

- 5) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
 - A) $(\mathbf{Z}, +)$ (\mathbf{Z} = insieme dei numeri interi, $+$ = usuale somma di numeri interi).
 - B) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
 - C) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ (\mathbf{Q} = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, \cdot = usuale prodotto di numeri razionali).
 - D) l'insieme \mathbf{Z}_5 delle classi di resto modulo 5, con le usuali operazioni di somma e prodotto.

- 6) Siano A , B e C tre matrici reali invertibili $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
 - B) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
 - C) ${}^t({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = A \cdot B \cdot C$.
 - D) $\det(2A) = 2^n \det A$.
- 7) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) l'insieme $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ è una base per \mathbf{R}^3 .
 - B) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - C) l'unione di due sottoinsiemi linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente dipendente.
 - D) l'insieme delle settuple ordinate di numeri interi dispari è un insieme di generatori per \mathbf{R}^7 .
- 8) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .
 - B) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - C) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
 - D) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
- 9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
 - B) se 0 è un autovalore di T allora T non è un isomorfismo.
 - C) λ è un autovalore di T se e solo se è una radice del suo polinomio caratteristico.
 - D) se $\det(\lambda I - A) = 0$ per un certo numero reale λ allora V ammette una base spettrale relativa a T .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) per definizione, si dice versore ogni vettore dotato di verso.
 - B) se due vettori u, v di uno spazio vettoriale euclideo sono ortogonali allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
 - C) due basi ordinate di uno spazio vettoriale euclideo si dicono discordi se la matrice del cambiamento di base dalla prima base alla seconda ha determinante negativo.
 - D) le trasformazioni ortogonali fra spazi vettoriali euclidei conservano le norme dei vettori.

- 2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
 - B) $\det(A + 3B + 5C) = \det A + 3 \det B + 5 \det C$.
 - C) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(A \cdot {}^t B \cdot C)$.
 - D) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.

- 3) Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbf{R} . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) l'intersezione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.
 - B) l'insieme $\{(1, 1, 0, 1, 3), (1, 2, -1, 0, -2), (3, 1, 1, 3, -1), (4, 1, 3, 1, 0)\}$ è un insieme di generatori per \mathbf{R}^5 .
 - C) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 0), (1, 2, 3, 0)\}$ è una base per \mathbf{R}^4 .
 - D) l'unione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente.

- 4) Si consideri il sottospazio \mathcal{A} dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) \mathcal{A} è una retta parallela all'asse delle x .
 - B) \mathcal{A} è un piano ortogonale all'asse delle z .
 - C) \mathcal{A} è una retta ortogonale all'asse delle y .
 - D) \mathcal{A} è un piano parallelo all'asse delle y .

- 5) Sia \mathbf{S} un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice completa e incompleta associate ad \mathbf{S} , rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - A) se \mathbf{S} non ammette soluzioni allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
 - B) se $m = n$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 - C) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora \mathbf{S} ammette una ed una sola soluzione.
 - D) se $m < n$ allora \mathbf{S} ammette ∞^{n-m} soluzioni.

- 6) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) T è iniettiva e suriettiva.
 - B) $\dim V = \rho(A)$.
 - C) $T \circ T$ è ancora un automorfismo di V .
 - D) $\det A = \rho(A)$.
- 7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una qualunque base fissata di V . Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
- A) la molteplicità geometrica di un autovalore di T è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica.
 - B) se v è un autovettore di T allora esiste un λ tale che $T(v) = \lambda v$.
 - C) se A non è simmetrica allora V non può ammettere una base spettrale relativa a T .
 - D) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.
- 8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere in un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato:
- A) le rette di equazioni cartesiane $2x - y = 0$ e $4x + 8y = 0$ sono fra loro ortogonali.
 - B) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(3, 4)$ è $\sqrt{3}$.
 - C) la conica di equazione $y = 4x^2$ è un'iperbole.
 - D) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e l'asse delle x è 5.
- 9) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
- A) $(\mathbf{R}^7, +)$ (\mathbf{R}^7 = insieme delle 7-uple ordinate di numeri reali, $+$ = usuale somma di n -uple).
 - B) Insieme delle funzioni continue da \mathbf{R} in \mathbf{R} , con l'usuale somma di funzioni.
 - C) insieme delle matrici reali 3×3 ottenute moltiplicando la matrice identica per un qualunque numero reale, con l'usuale somma di matrici.
 - D) (\mathbf{C}, \cdot) (\mathbf{C} = insieme dei numeri complessi, \cdot = usuale prodotto di numeri complessi).