N. di Matricola: 00101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto all'usuale operazione di somma di matrici.

F **V** b) $\mathbb{R}^7[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F **V** c) $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale somma di numeri reali.

F **V** d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

F **V** b) Se A è invertibile, il determinante di A e quello della sua inversa coincidono.

F **V** c) Se A è invertibile, anche $A + A$ è invertibile.

F **V** d) Se A è ortogonale allora $\det(A^{49} \cdot ({}^tA)^{51}) = 1$.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F **V** a) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n+1$ è linearmente dipendente.

F **V** b) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $m \leq n$ è contenuto in almeno una base.

F **V** c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ ha dimensione inferiore o uguale a n.

F **V** d) $\mathbf{V}$ ammette esattamente n basi distinte.

4) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : A \mapsto 2A$.

F **V** b) $T : A \mapsto {}^tA$.

F **V** c) $T : A \mapsto A + I$, dove I indica la matrice identica $n \times n$.

F **V** d) $T : A \mapsto A^3$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F **V** a) Ogni trasformazione lineare iniettiva da $\mathcal{M}_{2\times5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{10}$ è anche suriettiva.

F **V** b) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, hanno la stessa dimensione.

F **V** c) Se una matrice reale A ha rango k allora anche $2A$ ha rango k.

F **V** d) L'immagine di una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F **V** b) Se il rango di A è uguale al rango di C allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione.

F **V** c) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

F **V** d) $\rho(A) \leq \rho(C)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se T non è suriettiva allora 0 è un autovalore di T.

F **V** b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora B è simile ad A.

F **V** c) Il polinomio caratteristico di T può non avere radici reali.

F **V** d) Se λ è un autovalore di T allora λ^2 è un autovalore di $T \circ T$.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T è invertibile.

F **V** b) Se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** c) Se X è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora lo è anche $T(X)$.

F **V** d) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^3 lo è.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F **V** a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F **V** b) Se U è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 allora $\dim({}^{\perp}U) = 2$.

F **V** c) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 orientazioni diverse.

F **V** d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Si ha sempre $m \leq n$.

F **V** b) Se $m \leq n$ allora **S** ammette soluzioni.

F **V** c) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F **V** d) **S** ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F **V** a) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

F **V** b) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità 3 non contenente il vettore nullo è una base di $\mathbb{R}^3$.

F **V** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $2\mathbf{u} \wedge (3\mathbf{v} \wedge 4\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F **V** d) La base canonica è l'unica base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se $p(t)$ è il polinomio caratteristico di A ed n è pari allora $p(0) = \det A$.

F **V** b) Il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.

F **V** c) Se A non è simmetrica allora A non è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T ammette n autovalori distinti.

4) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : A \mapsto A^2 - A$.

F **V** b) $T : A \mapsto -A$.

F **V** c) $T : A \mapsto A +^t A$.

F **V** d) $T : A \mapsto \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ indica la matrice nulla $n \times n$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è ortogonale è anche invertibile.

F **V** b) Se A è ortogonale, anche $A + A$ è ortogonale.

F **V** c) Il determinante di A e quello della sua trasposta coincidono.

F **V** d) Se A non è invertibile allora $\det(A^{55} \cdot ({}^tA)^{30}) = 0$.

6) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) Insieme delle matrici 7×7 reali invertibili, rispetto all'usuale operazione di prodotto di matrici.

F **V** b) $\mathbb{N}$ rispetto all'usuale somma di numeri naturali.

F **V** c) $\mathbb{R}^4[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

F **V** d) $\mathbb{R}[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F **V** a) Una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1 se e solo se è invertibile.

F **V** b) Ogni trasformazione lineare suriettiva $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è anche iniettiva.

F **V** c) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite non sono isomorfi, non hanno la stessa dimensione.

F **V** d) Se una matrice quadrata reale A ha rango k allora anche A^2 ha rango k.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F **V** a) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n + 1$ può essere un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

F **V** b) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale che può avere dimensione strettamente maggiore di n.

F **V** c) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

F **V** d) Se n è dispari $\mathbf{V}$ può non ammettere alcuna base.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se T è invertibile e $\mathbf{v}$ è un autovettore di T allora $\mathbf{v}$ è anche un autovettore di T^{-1}.

F **V** b) La somma di due autovettori di T è sempre un autovettore di T.

F **V** c) Se una matrice quadrata reale ha lo stesso rango di A allora è simile ad A.

F **V** d) Possono esistere autospazi di T che non sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è ortogonale allora $\det(A^{49} \cdot ({}^t\!A)^{51}) = 1$.

F **V** b) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

F **V** c) Se A è invertibile, il determinante di A e quello della sua inversa coincidono.

F **V** d) Se A è invertibile, anche $A + A$ è invertibile.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F **V** a) L'immagine di una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

F **V** b) Se una matrice reale A ha rango k allora anche $2A$ ha rango k.

F **V** c) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, hanno la stessa dimensione.

F **V** d) Ogni trasformazione lineare iniettiva da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{10}$ è anche suriettiva.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) $\rho(A) \leq \rho(C)$.

F **V** b) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

F **V** c) Se il rango di A è uguale al rango di C allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione.

F **V** d) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Possono esistere autospazi di T che non sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$.

F **V** b) Se una matrice quadrata reale ha lo stesso rango di A allora è simile ad A.

F **V** c) Se T è invertibile e $\mathbf{v}$ è un autovettore di T allora $\mathbf{v}$ è anche un autovettore di T^{-1}.

F **V** d) La somma di due autovettori di T è sempre un autovettore di T.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F **V** a) $\mathbf{V}$ ammette esattamente n basi distinte.

F **V** b) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n + 1$ è linearmente dipendente.

F **V** c) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $m \leq n$ è contenuto in almeno una base.

F **V** d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ ha dimensione inferiore o uguale a n.

6) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : A \mapsto A^3$.

F V b) $T : A \mapsto A + I$, dove I indica la matrice identica $n \times n$.

F V c) $T : A \mapsto {}^tA$.

F V d) $T : A \mapsto 2A$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T ammette n autovalori distinti.

F V b) Se A non è simmetrica allora A non è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Se $p(t)$ è il polinomio caratteristico di A ed n è pari allora $p(0) = \det A$.

F V d) Il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F V a) La base canonica è l'unica base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

F V b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $2\mathbf{u} \wedge (3\mathbf{v} \wedge 4\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F V c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

F V d) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità 3 non contenente il vettore nullo è una base di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F V b) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto all'usuale operazione di somma di matrici.

F V c) $\mathbb{R}^7[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F V d) $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale somma di numeri reali.

N. di Matricola: 01000

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F **V** a) Se U è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 allora $\dim(^{\perp}U) = 2$.

F **V** b) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 orientazioni diverse.

F **V** c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

F **V** d) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F **V** a) Se una matrice quadrata reale A ha rango k allora anche A^2 ha rango k.

F **V** b) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite non sono isomorfi, non hanno la stessa dimensione.

F **V** c) Ogni trasformazione lineare suriettiva $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è anche iniettiva.

F **V** d) Una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1 se e solo se è invertibile.

3) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

F **V** b) $\mathbb{N}$ rispetto all'usuale somma di numeri naturali.

F **V** c) Insieme delle matrici 7×7 reali invertibili, rispetto all'usuale operazione di prodotto di matrici.

F **V** d) $\mathbb{R}^4[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

F **V** b) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F **V** c) Se $m \leq n$ allora $\mathbf{S}$ ammette soluzioni.

F **V** d) Si ha sempre $m \leq n$.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** b) Se X è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora lo è anche $T(X)$.

F **V** c) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^3 lo è.

F **V** d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T è invertibile.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora B è simile ad A.

F **V** b) Il polinomio caratteristico di T può non avere radici reali.

F **V** c) Se λ è un autovalore di T allora λ^2 è un autovalore di $T \circ T$.

F **V** d) Se T non è suriettiva allora 0 è un autovalore di T.

7) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F **V** a) Se n è dispari **V** può non ammettere alcuna base.

F **V** b) La somma di due sottospazi vettoriali di **V** è uno spazio vettoriale che può avere dimensione strettamente maggiore di n.

F **V** c) Nessun sottoinsieme di **V** di cardinalità $n + 1$ può essere un sistema di generatori per **V**.

F **V** d) Tutte le basi di **V** hanno la stessa cardinalità.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A non è invertibile allora $\det(A^{55} \cdot ({}^tA)^{30}) = 0$.

F **V** b) Se A è ortogonale, anche $A + A$ è ortogonale.

F **V** c) Se A è ortogonale è anche invertibile.

F **V** d) Il determinante di A e quello della sua trasposta coincidono.

9) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : A \mapsto \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ indica la matrice nulla $n \times n$.

F **V** b) $T : A \mapsto A + {}^tA$.

F **V** c) $T : A \mapsto -A$.

F **V** d) $T : A \mapsto A^2 - A$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A non è invertibile allora $\det(A^{55} \cdot ({}^t\!A)^{30}) = 0$.
F V b) Se A è ortogonale è anche invertibile.
F V c) Se A è ortogonale, anche $A + A$ è ortogonale.
F V d) Il determinante di A e quello della sua trasposta coincidono.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F V a) Se n è dispari $\mathbf{V}$ può non ammettere alcuna base.
F V b) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n + 1$ può essere un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.
F V c) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale che può avere dimensione strettamente maggiore di n.
F V d) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
F V b) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^3 lo è.
F V c) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T è invertibile.
F V d) Se X è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora lo è anche $T(X)$.

4) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : A \mapsto {}^t\!A$.
F V b) $T : A \mapsto 2A$.
F V c) $T : A \mapsto A^3$.
F V d) $T : A \mapsto A + I$, dove I indica la matrice identica $n \times n$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F V a) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, hanno la stessa dimensione.
F V b) Ogni trasformazione lineare iniettiva da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{10}$ è anche suriettiva.
F V c) L'immagine di una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.
F V d) Se una matrice reale A ha rango k allora anche $2A$ ha rango k.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se il rango di A è uguale al rango di C allora **S** ammette esattamente una soluzione.

F **V** b) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F **V** c) $\rho(A) \leq \rho(C)$.

F **V** d) **S** ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora B è simile ad A.

F **V** b) Se λ è un autovalore di T allora λ^2 è un autovalore di $T \circ T$.

F **V** c) Se T non è suriettiva allora 0 è un autovalore di T.

F **V** d) Il polinomio caratteristico di T può non avere radici reali.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F **V** a) Se U è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 allora $\dim({}^{\perp}U) = 2$.

F **V** b) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

F **V** c) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F **V** d) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 orientazioni diverse.

9) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

F **V** b) Insieme delle matrici 7×7 reali invertibili, rispetto all'usuale operazione di prodotto di matrici.

F **V** c) $\mathbb{N}$ rispetto all'usuale somma di numeri naturali.

F **V** d) $\mathbb{R}^4[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se una matrice quadrata reale ha lo stesso rango di A allora è simile ad A.

F V b) Possono esistere autospazi di T che non sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$.

F V c) La somma di due autovettori di T è sempre un autovettore di T.

F V d) Se T è invertibile e $\mathbf{v}$ è un autovettore di T allora $\mathbf{v}$ è anche un autovettore di T^{-1}.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $m \leq n$ allora **S** ammette soluzioni.

F V b) Si ha sempre $m \leq n$.

F V c) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F V d) **S** ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A è invertibile, il determinante di A e quello della sua inversa coincidono.

F V b) Se A è invertibile, anche $A + A$ è invertibile.

F V c) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

F V d) Se A è ortogonale allora $\det(A^{49} \cdot ({}^t\!A)^{51}) = 1$.

4) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}^7[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F V b) $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale somma di numeri reali.

F V c) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto all'usuale operazione di somma di matrici.

F V d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A non è simmetrica allora A non è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T ammette n autovalori distinti.

F V c) Il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.

F V d) Se $p(t)$ è il polinomio caratteristico di A ed n è pari allora $p(0) = \det A$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F V a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $2\mathbf{u} \wedge (3\mathbf{v} \wedge 4\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F V b) La base canonica è l'unica base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

F V c) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità 3 non contenente il vettore nullo è una base di $\mathbb{R}^3$.

F V d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

7) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : A \mapsto -A$.

F V b) $T : A \mapsto A^2 - A$.

F V c) $T : A \mapsto A +{}^tA$.

F V d) $T : A \mapsto \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ indica la matrice nulla $n \times n$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F V a) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $m \leq n$ è contenuto in almeno una base.

F V b) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ ha dimensione inferiore o uguale a n.

F V c) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n + 1$ è linearmente dipendente.

F V d) $\mathbf{V}$ ammette esattamente n basi distinte.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F V a) Ogni trasformazione lineare suriettiva $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è anche iniettiva.

F V b) Una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1 se e solo se è invertibile.

F V c) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite non sono isomorfi, non hanno la stessa dimensione.

F V d) Se una matrice quadrata reale A ha rango k allora anche A^2 ha rango k.

N. di Matricola: 01011

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A è ortogonale, anche $A + A$ è ortogonale.

F V b) Il determinante di A e quello della sua trasposta coincidono.

F V c) Se A non è invertibile allora $\det(A^{55} \cdot ({}^t\!A)^{30}) = 0$.

F V d) Se A è ortogonale è anche invertibile.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F V a) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale che può avere dimensione strettamente maggiore di n.

F V b) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

F V c) Se n è dispari $\mathbf{V}$ può non ammettere alcuna base.

F V d) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n + 1$ può essere un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

3) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : A \mapsto {}^t\!A$.

F V b) $T : A \mapsto A + I$, dove I indica la matrice identica $n \times n$.

F V c) $T : A \mapsto 2A$.

F V d) $T : A \mapsto A^3$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F V a) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, hanno la stessa dimensione.

F V b) Se una matrice reale A ha rango k allora anche $2A$ ha rango k.

F V c) Ogni trasformazione lineare iniettiva da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{10}$ è anche suriettiva.

F V d) L'immagine di una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F V a) La base canonica è l'unica base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

F V b) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

F V c) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità 3 non contenente il vettore nullo è una base di $\mathbb{R}^3$.

F V d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $2\mathbf{u} \wedge (3\mathbf{v} \wedge 4\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

6) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{N}$ rispetto all'usuale somma di numeri naturali.

F **V** b) $\mathbb{R}^4[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

F **V** c) $\mathbb{R}[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

F **V** d) Insieme delle matrici 7×7 reali invertibili, rispetto all'usuale operazione di prodotto di matrici.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se il rango di A è uguale al rango di C allora **S** ammette esattamente una soluzione.

F **V** b) **S** ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

F **V** c) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F **V** d) $\rho(A) \leq \rho(C)$.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Possono esistere autospazi di T che non sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$.

F **V** b) Se T è invertibile e $\mathbf{v}$ è un autovettore di T allora $\mathbf{v}$ è anche un autovettore di T^{-1}.

F **V** c) La somma di due autovettori di T è sempre un autovettore di T.

F **V** d) Se una matrice quadrata reale ha lo stesso rango di A allora è simile ad A.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T ammette n autovalori distinti.

F **V** b) Se $p(t)$ è il polinomio caratteristico di A ed n è pari allora $p(0) = \det A$.

F **V** c) Il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.

F **V** d) Se A non è simmetrica allora A non è diagonalizzabile per similitudine.

N. di Matricola: 01100

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F V a) Una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1 se e solo se è invertibile.

F V b) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite non sono isomorfi, non hanno la stessa dimensione.

F V c) Se una matrice quadrata reale A ha rango k allora anche A^2 ha rango k.

F V d) Ogni trasformazione lineare suriettiva $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è anche iniettiva.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se X è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora lo è anche $T(X)$.

F V b) Se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T è invertibile.

F V d) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^3 lo è.

3) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto all'usuale operazione di somma di matrici.

F V b) $\mathbb{R}^7[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F V c) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F V d) $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale somma di numeri reali.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F V a) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 orientazioni diverse.

F V b) Se U è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 allora $\dim(^{\perp}U) = 2$.

F V c) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F V d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F V a) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n+1$ è linearmente dipendente.

F V b) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $m \leq n$ è contenuto in almeno una base.

F V c) $\mathbf{V}$ ammette esattamente n basi distinte.

F V d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ ha dimensione inferiore o uguale a n.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

F **V** b) Se A è invertibile, il determinante di A e quello della sua inversa coincidono.

F **V** c) Se A è ortogonale allora $\det(A^{49} \cdot ({}^tA)^{51}) = 1$.

F **V** d) Se A è invertibile, anche $A + A$ è invertibile.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Si ha sempre $m \leq n$.

F **V** b) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F **V** c) **S** ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

F **V** d) Se $m \leq n$ allora **S** ammette soluzioni.

8) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : A \mapsto A^2 - A$.

F **V** b) $T : A \mapsto A + {}^tA$.

F **V** c) $T : A \mapsto \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ indica la matrice nulla $n \times n$.

F **V** d) $T : A \mapsto -A$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Il polinomio caratteristico di T può non avere radici reali.

F **V** b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora B è simile ad A.

F **V** c) Se T non è suriettiva allora 0 è un autovalore di T.

F **V** d) Se λ è un autovalore di T allora λ^2 è un autovalore di $T \circ T$.

N. di Matricola: 01101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F V a) Ogni sottoinsieme di **V** di cardinalità $m \leq n$ è contenuto in almeno una base.

F V b) **V** ammette esattamente n basi distinte.

F V c) Ogni sottospazio vettoriale di **V** ha dimensione inferiore o uguale a n.

F V d) Ogni sottoinsieme di **V** di cardinalità $n+1$ è linearmente dipendente.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T è invertibile.

F V c) Se X è un sistema di generatori di **V** allora lo è anche $T(X)$.

F V d) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^3 lo è.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F V a) Se U è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 allora $\dim({}^{\perp}U) = 2$.

F V b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F V c) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 orientazioni diverse.

F V d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

4) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : A \mapsto A^3$.

F V b) $T : A \mapsto A + I$, dove I indica la matrice identica $n \times n$.

F V c) $T : A \mapsto 2A$.

F V d) $T : A \mapsto {}^tA$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F V a) L'immagine di una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di **W**.

F V b) Se una matrice reale A ha rango k allora anche $2A$ ha rango k.

F V c) Ogni trasformazione lineare iniettiva da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{10}$ è anche suriettiva.

F V d) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, hanno la stessa dimensione.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) $\rho(A) \leq \rho(C)$.

F **V** b) **S** ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

F **V** c) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F **V** d) Se il rango di A è uguale al rango di C allora **S** ammette esattamente una soluzione.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora B è simile ad A.

F **V** b) Se T non è suriettiva allora 0 è un autovalore di T.

F **V** c) Il polinomio caratteristico di T può non avere radici reali.

F **V** d) Se λ è un autovalore di T allora λ^2 è un autovalore di $T \circ T$.

8) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}^7[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F **V** b) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F **V** c) $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale somma di numeri reali.

F **V** d) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto all'usuale operazione di somma di matrici.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è invertibile, il determinante di A e quello della sua inversa coincidono.

F **V** b) Se A è ortogonale allora $\det(A^{49} \cdot ({}^tA)^{51}) = 1$.

F **V** c) Se A è invertibile, anche $A + A$ è invertibile.

F **V** d) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

N. di Matricola: 01110

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se A non è simmetrica allora A non è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** b) Il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.

F **V** c) Se $p(t)$ è il polinomio caratteristico di A ed n è pari allora $p(0) = \det A$.

F **V** d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T ammette n autovalori distinti.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se una matrice quadrata reale ha lo stesso rango di A allora è simile ad A.

F **V** b) La somma di due autovettori di T è sempre un autovettore di T.

F **V** c) Se T è invertibile e $\mathbf{v}$ è un autovettore di T allora $\mathbf{v}$ è anche un autovettore di T^{-1}.

F **V** d) Possono esistere autospazi di T che non sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Il determinante di A e quello della sua trasposta coincidono.

F **V** b) Se A è ortogonale è anche invertibile.

F **V** c) Se A è ortogonale, anche $A + A$ è ortogonale.

F **V** d) Se A non è invertibile allora $\det(A^{55} \cdot ({}^tA)^{30}) = 0$.

4) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}^4[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

F **V** b) Insieme delle matrici 7×7 reali invertibili, rispetto all'usuale operazione di prodotto di matrici.

F **V** c) $\mathbb{N}$ rispetto all'usuale somma di numeri naturali.

F **V** d) $\mathbb{R}[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F **V** a) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

F **V** b) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n + 1$ può essere un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

F **V** c) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale che può avere dimensione strettamente maggiore di n.

F **V** d) Se n è dispari $\mathbf{V}$ può non ammettere alcuna base.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se $m \leq n$ allora **S** ammette soluzioni.

F **V** b) Si ha sempre $m \leq n$.

F **V** c) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F **V** d) **S** ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F **V** a) Ogni trasformazione lineare suriettiva $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è anche iniettiva.

F **V** b) Una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1 se e solo se è invertibile.

F **V** c) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite non sono isomorfi, non hanno la stessa dimensione.

F **V** d) Se una matrice quadrata reale A ha rango k allora anche A^2 ha rango k.

8) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : A \mapsto -A$.

F **V** b) $T : A \mapsto A^2 - A$.

F **V** c) $T : A \mapsto A + {}^tA$.

F **V** d) $T : A \mapsto \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ indica la matrice nulla $n \times n$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F **V** a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $2\mathbf{u} \wedge (3\mathbf{v} \wedge 4\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F **V** b) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità 3 non contenente il vettore nullo è una base di $\mathbb{R}^3$.

F **V** c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

F **V** d) La base canonica è l'unica base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : A \mapsto A^3$.
F V b) $T : A \mapsto 2A$.
F V c) $T : A \mapsto {}^tA$.
F V d) $T : A \mapsto A + I$, dove I indica la matrice identica $n \times n$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) $\rho(A) \leq \rho(C)$.
F V b) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.
F V c) Se il rango di A è uguale al rango di C allora **S** ammette esattamente una soluzione.
F V d) **S** ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Possono esistere autospazi di T che non sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$.
F V b) Se una matrice quadrata reale ha lo stesso rango di A allora è simile ad A.
F V c) La somma di due autovettori di T è sempre un autovettore di T.
F V d) Se T è invertibile e $\mathbf{v}$ è un autovettore di T allora $\mathbf{v}$ è anche un autovettore di T^{-1}.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F V a) L'immagine di una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.
F V b) Ogni trasformazione lineare iniettiva da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{10}$ è anche suriettiva.
F V c) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, hanno la stessa dimensione.
F V d) Se una matrice reale A ha rango k allora anche $2A$ ha rango k.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T ammette n autovalori distinti.
F V b) Se A non è simmetrica allora A non è diagonalizzabile per similitudine.
F V c) Il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.
F V d) Se $p(t)$ è il polinomio caratteristico di A ed n è pari allora $p(0) = \det A$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F **V** a) La base canonica è l'unica base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

F **V** b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $2\mathbf{u} \wedge (3\mathbf{v} \wedge 4\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F **V** c) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità 3 non contenente il vettore nullo è una base di $\mathbb{R}^3$.

F **V** d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

7) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F **V** b) $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale somma di numeri reali.

F **V** c) $\mathbb{R}^7[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F **V** d) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto all'usuale operazione di somma di matrici.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è ortogonale allora $\det(A^{49} \cdot ({}^tA)^{51}) = 1$.

F **V** b) Se A è invertibile, anche $A + A$ è invertibile.

F **V** c) Se A è invertibile, il determinante di A e quello della sua inversa coincidono.

F **V** d) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F **V** a) $\mathbf{V}$ ammette esattamente n basi distinte.

F **V** b) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ ha dimensione inferiore o uguale a n.

F **V** c) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $m \leq n$ è contenuto in almeno una base.

F **V** d) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n + 1$ è linearmente dipendente.

N. di Matricola: 10000

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è ortogonale, anche $A + A$ è ortogonale.

F **V** b) Il determinante di A e quello della sua trasposta coincidono.

F **V** c) Se A è ortogonale è anche invertibile.

F **V** d) Se A non è invertibile allora $\det(A^{55} \cdot ({}^t\!A)^{30}) = 0$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se $m \leq n$ allora **S** ammette soluzioni.

F **V** b) Si ha sempre $m \leq n$.

F **V** c) **S** ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

F **V** d) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora B è simile ad A.

F **V** b) Se T non è suriettiva allora 0 è un autovalore di T.

F **V** c) Se λ è un autovalore di T allora λ^2 è un autovalore di $T \circ T$.

F **V** d) Il polinomio caratteristico di T può non avere radici reali.

4) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F **V** a) La somma di due sottospazi vettoriali di **V** è uno spazio vettoriale che può avere dimensione strettamente maggiore di n.

F **V** b) Tutte le basi di **V** hanno la stessa cardinalità.

F **V** c) Nessun sottoinsieme di **V** di cardinalità $n + 1$ può essere un sistema di generatori per **V**.

F **V** d) Se n è dispari **V** può non ammettere alcuna base.

5) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{N}$ rispetto all'usuale somma di numeri naturali.

F **V** b) $\mathbb{R}^4[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

F **V** c) Insieme delle matrici 7×7 reali invertibili, rispetto all'usuale operazione di prodotto di matrici.

F **V** d) $\mathbb{R}[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T è invertibile.

F **V** c) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^3 lo è.

F **V** d) Se X è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora lo è anche $T(X)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F **V** a) Ogni trasformazione lineare suriettiva $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è anche iniettiva.

F **V** b) Una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1 se e solo se è invertibile.

F **V** c) Se una matrice quadrata reale A ha rango k allora anche A^2 ha rango k.

F **V** d) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite non sono isomorfi, non hanno la stessa dimensione.

8) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : A \mapsto -A$.

F **V** b) $T : A \mapsto A^2 - A$.

F **V** c) $T : A \mapsto \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ indica la matrice nulla $n \times n$.

F **V** d) $T : A \mapsto A + {}^tA$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F **V** a) Se U è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 allora $\dim({}^\perp U) = 2$.

F **V** b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F **V** c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

F **V** d) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 orientazioni diverse.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F **V** a) Nessun sottoinsieme di **V** di cardinalità $n+1$ può essere un sistema di generatori per **V**.

F **V** b) Se n è dispari **V** può non ammettere alcuna base.

F **V** c) La somma di due sottospazi vettoriali di **V** è uno spazio vettoriale che può avere dimensione strettamente maggiore di n.

F **V** d) Tutte le basi di **V** hanno la stessa cardinalità.

2) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : A \mapsto A + I$, dove I indica la matrice identica $n \times n$.

F **V** b) $T : A \mapsto A^3$.

F **V** c) $T : A \mapsto {}^tA$.

F **V** d) $T : A \mapsto 2A$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F **V** a) Se una matrice reale A ha rango k allora anche $2A$ ha rango k.

F **V** b) L'immagine di una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di **W**.

F **V** c) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, hanno la stessa dimensione.

F **V** d) Ogni trasformazione lineare iniettiva da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{10}$ è anche suriettiva.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) **S** ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

F **V** b) $\rho(A) \leq \rho(C)$.

F **V** c) Se il rango di A è uguale al rango di C allora **S** ammette esattamente una soluzione.

F **V** d) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è ortogonale è anche invertibile.

F **V** b) Se A non è invertibile allora $\det(A^{55} \cdot ({}^tA)^{30}) = 0$.

F **V** c) Se A è ortogonale, anche $A + A$ è ortogonale.

F **V** d) Il determinante di A e quello della sua trasposta coincidono.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se X è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora lo è anche $T(X)$.

F **V** b) Se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** c) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T è invertibile.

F **V** d) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^3 lo è.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F **V** a) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 orientazioni diverse.

F **V** b) Se U è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 allora $\dim(^{\perp}U) = 2$.

F **V** c) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F **V** d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Il polinomio caratteristico di T può non avere radici reali.

F **V** b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora B è simile ad A.

F **V** c) Se T non è suriettiva allora 0 è un autovalore di T.

F **V** d) Se λ è un autovalore di T allora λ^2 è un autovalore di $T \circ T$.

9) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) Insieme delle matrici 7×7 reali invertibili, rispetto all'usuale operazione di prodotto di matrici.

F **V** b) $\mathbb{R}[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

F **V** c) $\mathbb{N}$ rispetto all'usuale somma di numeri naturali.

F **V** d) $\mathbb{R}^4[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T ammette n autovalori distinti.

F V b) Il polinomio caratteristico di T ha grado $n+1$.

F V c) Se $p(t)$ è il polinomio caratteristico di A ed n è pari allora $p(0) = \det A$.

F V d) Se A non è simmetrica allora A non è diagonalizzabile per similitudine.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Possono esistere autospazi di T che non sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$.

F V b) La somma di due autovettori di T è sempre un autovettore di T.

F V c) Se T è invertibile e $\mathbf{v}$ è un autovettore di T allora $\mathbf{v}$ è anche un autovettore di T^{-1}.

F V d) Se una matrice quadrata reale ha lo stesso rango di A allora è simile ad A.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A è invertibile, anche $A + A$ è invertibile.

F V b) Se A è ortogonale allora $\det(A^{49} \cdot ({}^tA)^{51}) = 1$.

F V c) Se A è invertibile, il determinante di A e quello della sua inversa coincidono.

F V d) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

4) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale somma di numeri reali.

F V b) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F V c) $\mathbb{R}^7[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F V d) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto all'usuale operazione di somma di matrici.

5) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : A \mapsto \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ indica la matrice nulla $n \times n$.

F V b) $T : A \mapsto A + {}^tA$.

F V c) $T : A \mapsto -A$.

F V d) $T : A \mapsto A^2 - A$.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F V a) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ ha dimensione inferiore o uguale a n.

F V b) $\mathbf{V}$ ammette esattamente n basi distinte.

F V c) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $m \leq n$ è contenuto in almeno una base.

F V d) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n+1$ è linearmente dipendente.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F V a) La base canonica è l'unica base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

F V b) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità 3 non contenente il vettore nullo è una base di $\mathbb{R}^3$.

F V c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

F V d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $2\mathbf{u} \wedge (3\mathbf{v} \wedge 4\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F V a) Se una matrice quadrata reale A ha rango k allora anche A^2 ha rango k.

F V b) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite non sono isomorfi, non hanno la stessa dimensione.

F V c) Ogni trasformazione lineare suriettiva $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è anche iniettiva.

F V d) Una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1 se e solo se è invertibile.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

F V b) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F V c) Se $m \leq n$ allora $\mathbf{S}$ ammette soluzioni.

F V d) Si ha sempre $m \leq n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : A \mapsto {}^tA$.

F V b) $T : A \mapsto A + I$, dove I indica la matrice identica $n \times n$.

F V c) $T : A \mapsto A^3$.

F V d) $T : A \mapsto 2A$.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se una matrice quadrata reale ha lo stesso rango di A allora è simile ad A.

F V b) Possono esistere autospazi di T che non sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$.

F V c) Se T è invertibile e $\mathbf{v}$ è un autovettore di T allora $\mathbf{v}$ è anche un autovettore di T^{-1}.

F V d) La somma di due autovettori di T è sempre un autovettore di T.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F V a) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, hanno la stessa dimensione.

F V b) Se una matrice reale A ha rango k allora anche $2A$ ha rango k.

F V c) L'immagine di una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

F V d) Ogni trasformazione lineare iniettiva da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{10}$ è anche suriettiva.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A non è simmetrica allora A non è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T ammette n autovalori distinti.

F V c) Se $p(t)$ è il polinomio caratteristico di A ed n è pari allora $p(0) = \det A$.

F V d) Il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F V a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $2\mathbf{u} \wedge (3\mathbf{v} \wedge 4\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F V b) La base canonica è l'unica base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

F V c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

F V d) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità 3 non contenente il vettore nullo è una base di $\mathbb{R}^3$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di A è uguale al rango di C allora **S** ammette esattamente una soluzione.
F V b) **S** ammette soluzioni se e solo se $A = C$.
F V c) $\rho(A) \leq \rho(C)$.
F V d) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

7) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.
F V b) Insieme delle matrici 7×7 reali invertibili, rispetto all'usuale operazione di prodotto di matrici.
F V c) $\mathbb{R}^4[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.
F V d) $\mathbb{N}$ rispetto all'usuale somma di numeri naturali.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A non è invertibile allora $\det(A^{55} \cdot ({}^t\!A)^{30}) = 0$.
F V b) Se A è ortogonale è anche invertibile.
F V c) Il determinante di A e quello della sua trasposta coincidono.
F V d) Se A è ortogonale, anche $A + A$ è ortogonale.

9) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F V a) Se n è dispari **V** può non ammettere alcuna base.
F V b) Nessun sottoinsieme di **V** di cardinalità $n + 1$ può essere un sistema di generatori per **V**.
F V c) Tutte le basi di **V** hanno la stessa cardinalità.
F V d) La somma di due sottospazi vettoriali di **V** è uno spazio vettoriale che può avere dimensione strettamente maggiore di n.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F V b) $\mathbb{R}^7[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F V c) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto all'usuale operazione di somma di matrici.

F V d) $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale somma di numeri reali.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) **S** ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

F V b) Se $m \leq n$ allora **S** ammette soluzioni.

F V c) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F V d) Si ha sempre $m \leq n$.

3) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F V a) **V** ammette esattamente n basi distinte.

F V b) Ogni sottoinsieme di **V** di cardinalità $m \leq n$ è contenuto in almeno una base.

F V c) Ogni sottoinsieme di **V** di cardinalità $n + 1$ è linearmente dipendente.

F V d) Ogni sottospazio vettoriale di **V** ha dimensione inferiore o uguale a n.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A è ortogonale allora $\det(A^{49} \cdot ({}^tA)^{51}) = 1$.

F V b) Se A è invertibile, il determinante di A e quello della sua inversa coincidono.

F V c) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

F V d) Se A è invertibile, anche $A + A$ è invertibile.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F V a) Se una matrice quadrata reale A ha rango k allora anche A^2 ha rango k.

F V b) Ogni trasformazione lineare suriettiva $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è anche iniettiva.

F V c) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite non sono isomorfi, non hanno la stessa dimensione.

F V d) Una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1 se e solo se è invertibile.

6) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : A \mapsto \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ indica la matrice nulla $n \times n$.

F **V** b) $T : A \mapsto -A$.

F **V** c) $T : A \mapsto A +{}^tA$.

F **V** d) $T : A \mapsto A^2 - A$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se λ è un autovalore di T allora λ^2 è un autovalore di $T \circ T$.

F **V** b) Il polinomio caratteristico di T può non avere radici reali.

F **V** c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora B è simile ad A.

F **V** d) Se T non è suriettiva allora 0 è un autovalore di T.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F **V** a) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

F **V** b) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 orientazioni diverse.

F **V** c) Se U è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 allora $\dim({}^{\perp}U) = 2$.

F **V** d) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^3 lo è.

F **V** b) Se X è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora lo è anche $T(X)$.

F **V** c) Se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T è invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** b) Se X è un sistema di generatori di **V** allora lo è anche $T(X)$.

F **V** c) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T è invertibile.

F **V** d) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^3 lo è.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F **V** a) Se U è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 allora $\dim({}^{\perp}U) = 2$.

F **V** b) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 orientazioni diverse.

F **V** c) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F **V** d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

3) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F **V** a) Ogni sottoinsieme di **V** di cardinalità $m \leq n$ è contenuto in almeno una base.

F **V** b) **V** ammette esattamente n basi distinte.

F **V** c) Ogni sottospazio vettoriale di **V** ha dimensione inferiore o uguale a n.

F **V** d) Ogni sottoinsieme di **V** di cardinalità $n + 1$ è linearmente dipendente.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F **V** b) **S** ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

F **V** c) Se il rango di A è uguale al rango di C allora **S** ammette esattamente una soluzione.

F **V** d) $\rho(A) \leq \rho(C)$.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora B è simile ad A.

F **V** b) Il polinomio caratteristico di T può non avere radici reali.

F **V** c) Se T non è suriettiva allora 0 è un autovalore di T.

F **V** d) Se λ è un autovalore di T allora λ^2 è un autovalore di $T \circ T$.

6) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}^7[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F **V** b) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F **V** c) $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale somma di numeri reali.

F **V** d) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto all'usuale operazione di somma di matrici.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è invertibile, il determinante di A e quello della sua inversa coincidono.

F **V** b) Se A è ortogonale allora $\det(A^{49} \cdot ({}^tA)^{51}) = 1$.

F **V** c) Se A è invertibile, anche $A + A$ è invertibile.

F **V** d) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

8) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : A \mapsto 2A$.

F **V** b) $T : A \mapsto A + I$, dove I indica la matrice identica $n \times n$.

F **V** c) $T : A \mapsto {}^tA$.

F **V** d) $T : A \mapsto A^3$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F **V** a) Ogni trasformazione lineare iniettiva da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{10}$ è anche suriettiva.

F **V** b) Se una matrice reale A ha rango k allora anche $2A$ ha rango k.

F **V** c) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, hanno la stessa dimensione.

F **V** d) L'immagine di una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : A \mapsto A + {}^tA$.

F V b) $T : A \mapsto A^2 - A$.

F V c) $T : A \mapsto \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ indica la matrice nulla $n \times n$.

F V d) $T : A \mapsto -A$.

2) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) Insieme delle matrici 7×7 reali invertibili, rispetto all'usuale operazione di prodotto di matrici.

F V b) $\mathbb{R}[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

F V c) $\mathbb{R}^4[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

F V d) $\mathbb{N}$ rispetto all'usuale somma di numeri naturali.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F V b) Si ha sempre $m \leq n$.

F V c) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

F V d) Se $m \leq n$ allora $\mathbf{S}$ ammette soluzioni.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F V a) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità 3 non contenente il vettore nullo è una base di $\mathbb{R}^3$.

F V b) La base canonica è l'unica base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

F V c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $2\mathbf{u} \wedge (3\mathbf{v} \wedge 4\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F V d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F V a) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n + 1$ può essere un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

F V b) Se n è dispari $\mathbf{V}$ può non ammettere alcuna base.

F V c) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

F V d) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale che può avere dimensione strettamente maggiore di n.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è ortogonale è anche invertibile.

F **V** b) Se A non è invertibile allora $\det(A^{55} \cdot ({}^t\!A)^{30}) = 0$.

F **V** c) Il determinante di A e quello della sua trasposta coincidono.

F **V** d) Se A è ortogonale, anche $A + A$ è ortogonale.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) La somma di due autovettori di T è sempre un autovettore di T.

F **V** b) Possono esistere autospazi di T che non sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$.

F **V** c) Se una matrice quadrata reale ha lo stesso rango di A allora è simile ad A.

F **V** d) Se T è invertibile e $\mathbf{v}$ è un autovettore di T allora $\mathbf{v}$ è anche un autovettore di T^{-1}.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F **V** a) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite non sono isomorfi, non hanno la stessa dimensione.

F **V** b) Una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1 se e solo se è invertibile.

F **V** c) Se una matrice quadrata reale A ha rango k allora anche A^2 ha rango k.

F **V** d) Ogni trasformazione lineare suriettiva $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è anche iniettiva.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.

F **V** b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T ammette n autovalori distinti.

F **V** c) Se A non è simmetrica allora A non è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** d) Se $p(t)$ è il polinomio caratteristico di A ed n è pari allora $p(0) = \det A$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : A \mapsto {}^tA$.

F V b) $T : A \mapsto 2A$.

F V c) $T : A \mapsto A + I$, dove I indica la matrice identica $n \times n$.

F V d) $T : A \mapsto A^3$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F V a) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, hanno la stessa dimensione.

F V b) Ogni trasformazione lineare iniettiva da $\mathcal{M}_{2\times5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{10}$ è anche suriettiva.

F V c) Se una matrice reale A ha rango k allora anche $2A$ ha rango k.

F V d) L'immagine di una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T ammette n autovalori distinti.

F V b) Se A non è simmetrica allora A non è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Se $p(t)$ è il polinomio caratteristico di A ed n è pari allora $p(0) = \det A$.

F V d) Il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F V a) La base canonica è l'unica base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

F V b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $2\mathbf{u} \wedge (3\mathbf{v} \wedge 4\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F V c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

F V d) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità 3 non contenente il vettore nullo è una base di $\mathbb{R}^3$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di A è uguale al rango di C allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione.

F V b) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F V c) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

F V d) $\rho(A) \le \rho(C)$.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Possono esistere autospazi di T che non sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$.

F **V** b) Se una matrice quadrata reale ha lo stesso rango di A allora è simile ad A.

F **V** c) Se T è invertibile e $\mathbf{v}$ è un autovettore di T allora $\mathbf{v}$ è anche un autovettore di T^{-1}.

F **V** d) La somma di due autovettori di T è sempre un autovettore di T.

7) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F **V** b) $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale somma di numeri reali.

F **V** c) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto all'usuale operazione di somma di matrici.

F **V** d) $\mathbb{R}^7[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è ortogonale allora $\det(A^{49} \cdot ({}^t\!A)^{51}) = 1$.

F **V** b) Se A è invertibile, anche $A + A$ è invertibile.

F **V** c) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

F **V** d) Se A è invertibile, il determinante di A e quello della sua inversa coincidono.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F **V** a) $\mathbf{V}$ ammette esattamente n basi distinte.

F **V** b) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ ha dimensione inferiore o uguale a n.

F **V** c) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n + 1$ è linearmente dipendente.

F **V** d) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $m \leq n$ è contenuto in almeno una base.

N. di Matricola: 11000

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Il determinante di A e quello della sua trasposta coincidono.

F **V** b) Se A non è invertibile allora $\det(A^{55} \cdot ({}^tA)^{30}) = 0$.

F **V** c) Se A è ortogonale, anche $A + A$ è ortogonale.

F **V** d) Se A è ortogonale è anche invertibile.

2) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}^4[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

F **V** b) $\mathbb{R}[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

F **V** c) $\mathbb{N}$ rispetto all'usuale somma di numeri naturali.

F **V** d) Insieme delle matrici 7×7 reali invertibili, rispetto all'usuale operazione di prodotto di matrici.

3) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F **V** a) Tutte le basi di **V** hanno la stessa cardinalità.

F **V** b) Se n è dispari **V** può non ammettere alcuna base.

F **V** c) La somma di due sottospazi vettoriali di **V** è uno spazio vettoriale che può avere dimensione strettamente maggiore di n.

F **V** d) Nessun sottoinsieme di **V** di cardinalità $n + 1$ può essere un sistema di generatori per **V**.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora B è simile ad A.

F **V** b) Se T non è suriettiva allora 0 è un autovalore di T.

F **V** c) Il polinomio caratteristico di T può non avere radici reali.

F **V** d) Se λ è un autovalore di T allora λ^2 è un autovalore di $T \circ T$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F **V** a) Se una matrice quadrata reale A ha rango k allora anche A^2 ha rango k.

F **V** b) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite non sono isomorfi, non hanno la stessa dimensione.

F **V** c) Ogni trasformazione lineare suriettiva $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è anche iniettiva.

F **V** d) Una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1 se e solo se è invertibile.

6) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : A \mapsto \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ indica la matrice nulla $n \times n$.

F **V** b) $T : A \mapsto A +^t A$.

F **V** c) $T : A \mapsto -A$.

F **V** d) $T : A \mapsto A^2 - A$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T è invertibile.

F **V** c) Se X è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora lo è anche $T(X)$.

F **V** d) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^3 lo è.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F **V** a) Se U è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 allora $\dim(^\perp U) = 2$.

F **V** b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F **V** c) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 orientazioni diverse.

F **V** d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

F **V** b) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F **V** c) Se $m \leq n$ allora $\mathbf{S}$ ammette soluzioni.

F **V** d) Si ha sempre $m \leq n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F V a) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, hanno la stessa dimensione.

F V b) Ogni trasformazione lineare iniettiva da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{10}$ è anche suriettiva.

F V c) Se una matrice reale A ha rango k allora anche $2A$ ha rango k.

F V d) L'immagine di una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di A è uguale al rango di C allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione.

F V b) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F V c) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

F V d) $\rho(A) \leq \rho(C)$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora B è simile ad A.

F V b) Il polinomio caratteristico di T può non avere radici reali.

F V c) Se λ è un autovalore di T allora λ^2 è un autovalore di $T \circ T$.

F V d) Se T non è suriettiva allora 0 è un autovalore di T.

4) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{N}$ rispetto all'usuale somma di numeri naturali.

F V b) $\mathbb{R}^4[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

F V c) Insieme delle matrici 7×7 reali invertibili, rispetto all'usuale operazione di prodotto di matrici.

F V d) $\mathbb{R}[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se X è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora lo è anche $T(X)$.

F V c) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^3 lo è.

F V d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T è invertibile.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F **V** a) Se U è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 allora $\dim({}^{\perp}U) = 2$.

F **V** b) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 orientazioni diverse.

F **V** c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

F **V** d) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è ortogonale, anche $A + A$ è ortogonale.

F **V** b) Il determinante di A e quello della sua trasposta coincidono.

F **V** c) Se A è ortogonale è anche invertibile.

F **V** d) Se A non è invertibile allora $\det(A^{55} \cdot ({}^{t}\!A)^{30}) = 0$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F **V** a) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale che può avere dimensione strettamente maggiore di n.

F **V** b) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

F **V** c) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n + 1$ può essere un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

F **V** d) Se n è dispari $\mathbf{V}$ può non ammettere alcuna base.

9) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : A \mapsto {}^{t}\!A$.

F **V** b) $T : A \mapsto 2A$.

F **V** c) $T : A \mapsto A + I$, dove I indica la matrice identica $n \times n$.

F **V** d) $T : A \mapsto A^3$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è invertibile, il determinante di A e quello della sua inversa coincidono.

F **V** b) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

F **V** c) Se A è invertibile, anche $A + A$ è invertibile.

F **V** d) Se A è ortogonale allora $\det(A^{49} \cdot ({}^tA)^{51}) = 1$.

2) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}^7[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F **V** b) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto all'usuale operazione di somma di matrici.

F **V** c) $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale somma di numeri reali.

F **V** d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

3) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : A \mapsto A + {}^tA$.

F **V** b) $T : A \mapsto \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ indica la matrice nulla $n \times n$.

F **V** c) $T : A \mapsto A^2 - A$.

F **V** d) $T : A \mapsto -A$.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F **V** a) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $m \leq n$ è contenuto in almeno una base.

F **V** b) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n + 1$ è linearmente dipendente.

F **V** c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ ha dimensione inferiore o uguale a n.

F **V** d) $\mathbf{V}$ ammette esattamente n basi distinte.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se A non è simmetrica allora A non è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** b) Il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.

F **V** c) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T ammette n autovalori distinti.

F **V** d) Se $p(t)$ è il polinomio caratteristico di A ed n è pari allora $p(0) = \det A$.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se una matrice quadrata reale ha lo stesso rango di A allora è simile ad A.

F **V** b) La somma di due autovettori di T è sempre un autovettore di T.

F **V** c) Possono esistere autospazi di T che non sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$.

F **V** d) Se T è invertibile e $\mathbf{v}$ è un autovettore di T allora $\mathbf{v}$ è anche un autovettore di T^{-1}.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F **V** b) **S** ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

F **V** c) Si ha sempre $m \leq n$.

F **V** d) Se $m \leq n$ allora **S** ammette soluzioni.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F **V** a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $2\mathbf{u} \wedge (3\mathbf{v} \wedge 4\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F **V** b) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità 3 non contenente il vettore nullo è una base di $\mathbb{R}^3$.

F **V** c) La base canonica è l'unica base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

F **V** d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F **V** a) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite non sono isomorfi, non hanno la stessa dimensione.

F **V** b) Se una matrice quadrata reale A ha rango k allora anche A^2 ha rango k.

F **V** c) Una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1 se e solo se è invertibile.

F **V** d) Ogni trasformazione lineare suriettiva $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è anche iniettiva.

N. di Matricola: 11011

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) La somma di due autovettori di T è sempre un autovettore di T.

F V b) Possono esistere autospazi di T che non sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$.

F V c) Se T è invertibile e $\mathbf{v}$ è un autovettore di T allora $\mathbf{v}$ è anche un autovettore di T^{-1}.

F V d) Se una matrice quadrata reale ha lo stesso rango di A allora è simile ad A.

2) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : A \mapsto A + I$, dove I indica la matrice identica $n \times n$.

F V b) $T : A \mapsto {}^tA$.

F V c) $T : A \mapsto 2A$.

F V d) $T : A \mapsto A^3$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F V a) Se una matrice reale A ha rango k allora anche $2A$ ha rango k.

F V b) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, hanno la stessa dimensione.

F V c) Ogni trasformazione lineare iniettiva da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{10}$ è anche suriettiva.

F V d) L'immagine di una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F V a) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità 3 non contenente il vettore nullo è una base di $\mathbb{R}^3$.

F V b) La base canonica è l'unica base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

F V c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

F V d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $2\mathbf{u} \wedge (3\mathbf{v} \wedge 4\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

5) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) Insieme delle matrici 7×7 reali invertibili, rispetto all'usuale operazione di prodotto di matrici.

F V b) $\mathbb{N}$ rispetto all'usuale somma di numeri naturali.

F V c) $\mathbb{R}[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

F V d) $\mathbb{R}^4[t]$ rispetto all'usuale somma di polinomi.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è ortogonale è anche invertibile.

F **V** b) Se A è ortogonale, anche $A + A$ è ortogonale.

F **V** c) Se A non è invertibile allora $\det(A^{55} \cdot ({}^tA)^{30}) = 0$.

F **V** d) Il determinante di A e quello della sua trasposta coincidono.

7) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F **V** a) Nessun sottoinsieme di **V** di cardinalità $n + 1$ può essere un sistema di generatori per **V**.

F **V** b) La somma di due sottospazi vettoriali di **V** è uno spazio vettoriale che può avere dimensione strettamente maggiore di n.

F **V** c) Se n è dispari **V** può non ammettere alcuna base.

F **V** d) Tutte le basi di **V** hanno la stessa cardinalità.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Il polinomio caratteristico di T ha grado $n + 1$.

F **V** b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T ammette n autovalori distinti.

F **V** c) Se $p(t)$ è il polinomio caratteristico di A ed n è pari allora $p(0) = \det A$.

F **V** d) Se A non è simmetrica allora A non è diagonalizzabile per similitudine.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) **S** ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

F **V** b) Se il rango di A è uguale al rango di C allora **S** ammette esattamente una soluzione.

F **V** c) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F **V** d) $\rho(A) \leq \rho(C)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se T non è suriettiva allora 0 è un autovalore di T.
F **V** b) Se λ è un autovalore di T allora λ^2 è un autovalore di $T \circ T$.
F **V** c) Il polinomio caratteristico di T può non avere radici reali.
F **V** d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora B è simile ad A.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è invertibile, anche $A + A$ è invertibile.
F **V** b) Se A è invertibile, il determinante di A e quello della sua inversa coincidono.
F **V** c) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.
F **V** d) Se A è ortogonale allora $\det(A^{49} \cdot ({}^t\!A)^{51}) = 1$.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali. Allora

F **V** a) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ ha dimensione inferiore o uguale a n.
F **V** b) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $m \leq n$ è contenuto in almeno una base.
F **V** c) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n + 1$ è linearmente dipendente.
F **V** d) $\mathbf{V}$ ammette esattamente n basi distinte.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se T è invertibile.
F **V** b) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^3 lo è.
F **V** c) Se X è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora lo è anche $T(X)$.
F **V** d) Se T ammette n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

F **V** a) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite non sono isomorfi, non hanno la stessa dimensione.
F **V** b) Ogni trasformazione lineare suriettiva $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è anche iniettiva.
F **V** c) Una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1 se e solo se è invertibile.
F **V** d) Se una matrice quadrata reale A ha rango k allora anche A^2 ha rango k.

6) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : A \mapsto A +{}^tA$.

F **V** b) $T : A \mapsto -A$.

F **V** c) $T : A \mapsto A^2 - A$.

F **V** d) $T : A \mapsto \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ indica la matrice nulla $n \times n$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F **V** b) Se $m \leq n$ allora **S** ammette soluzioni.

F **V** c) Si ha sempre $m \leq n$.

F **V** d) **S** ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

F **V** a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F **V** b) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

F **V** c) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 orientazioni diverse.

F **V** d) Se U è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 allora $\dim({}^{\perp}U) = 2$.

9) Si dica quali dei seguenti insiemi sono gruppi commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale somma di numeri reali.

F **V** b) $\mathbb{R}^7[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.

F **V** c) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto all'usuale operazione di somma di matrici.

F **V** d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'usuale prodotto di polinomi.