Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

F V b) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F V c) $\mathbb{R}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri reali.

F V d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è ortogonale anche A^2 è ortogonale.

F V b) In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ esistono matrici aventi traccia negativa e determinante positivo.

F V c) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è invertibile, anche A^3 è invertibile.

F V d) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $A^2 = I$ allora $A = I$, dove I indica la matrice reale identica 2×2.

3) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 8 sul campo dei numeri reali.

F V a) Ogni sottoinsieme di **V** di cardinalità 7 è linearmente dipendente.

F V b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di **V** è contenuto in almeno una base di **V**.

F V c) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** di dimensione 5, **U** e **W** hanno in comune almeno un vettore non nullo.

F V d) Può accadere che **V** non ammetta alcuna base.

4) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$, dei polinomi $p(x)$ nella variabile x di grado minore o uguale a n a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : p(x) \mapsto \frac{dp}{dx}(x)$.

F V b) $T : p(x) \mapsto \ (p(x))^2$.

F V c) $T : p(x) \mapsto p(x)$.

F V d) $T : p(x) \mapsto \mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ denota il polinomio costante uguale a 1.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{3\times4}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{13}$ può essere suriettiva.

F V b) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, coincidono.

F V c) Se B è una sottomatrice di una matrice reale A allora $\rho(B) \leq \rho(A)$.

F V d) Se le immagini $T(\mathbf{V})$ e $S(\mathbf{V})$ di due trasformazioni lineari $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $S : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ coincidono, allora T e S coincidono.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F V b) Se il rango di A è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F V c) Se $m > n$ il sistema lineare **S** non può ammettere soluzioni.

F V d) Se il rango di A è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T è l'identità allora 1 è l'unico autovalore di T.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

F V c) T può non ammettere alcun polinomio caratteristico.

F V d) Se λ è un autovalore di T allora anche 2λ è un autovalore di T.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se $-A$ è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se T ha almeno un autovalore reale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Se T è iniettiva e X è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ allora anche $T(X)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

F V d) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti di T è linearmente indipendente.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{v} + 3\mathbf{v} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F V b) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 allora $\dim({}^{\perp}\mathbf{U}) = 1$.

F V c) Due basi di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa orientazione se e solo se coincidono.

F V d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette infinite rappresentazioni cartesiane distinte.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $\rho(C) < m$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F V b) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora **S** ammette una e una sola soluzione.

F V c) L'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F V d) Se $m = n$ allora **S** ammette esattamente n soluzioni distinte.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se r e s sono due rette di $\mathbb{R}^3$ non parallele, allora sono fra loro incidenti.

F V b) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità strettamente maggiore di 3 contiene il vettore nullo.

F V c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

F V d) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) T ammette una e una sola base spettrale.

F V b) Nessun autovalore di A può avere molteplicità geometrica strettamente inferiore alla sua molteplicità algebrica.

F V c) Se A è simmetrica allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a n.

4) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1, t + 1)$.

F V b) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + y, y + z, z + t, t + x)$.

F V c) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x^2, y^2, z^2, t^2)$.

F V d) $T : (x, y, z, t) \mapsto (xy, yz, zt, tx)$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F V b) Se A è simmetrica è anche ortogonale.

F V c) $\det\left(A^{2012}\right) \geq 0$.

F V d) Se A^2 è la matrice nulla allora A è la matrice nulla.

6) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) Insieme delle matrici 3×3 reali invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

F **V** b) $\mathbb{C}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri complessi.

F **V** c) $\mathbb{R}^8[t]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza di polinomi.

F **V** d) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F **V** a) Non esistono due matrici quadrate reali $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A+B) = \det A + \det B$.

F **V** b) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^9$ può essere iniettiva.

F **V** c) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F **V** d) Date due matrici quadrate reali A e B, si ha che $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 9 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) $\mathbf{V}$ ammette un numero infinito di basi distinte.

F **V** b) Qualunque insieme di 9 vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F **V** c) Può accadere che $\mathbf{V}$ non contenga alcun sottospazio vettoriale.

F **V** d) $\mathbf{V}$ è isomorfo allo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^9$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Il polinomio caratteristico di T ammette in ogni caso almeno un autovalore reale.

F **V** b) La somma di due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di T è sempre un autovettore di T associato allo stesso autovalore λ.

F **V** c) Se A è invertibile e diagonalizzabile per similitudine allora anche A^{-1} lo è.

F **V** d) La somma diretta di due autospazi qualunque di T è un autospazio di T.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $A^2 = I$ allora $A = I$, dove I indica la matrice reale identica 2×2.

F V b) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è ortogonale anche A^2 è ortogonale.

F V c) In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ esistono matrici aventi traccia negativa e determinante positivo.

F V d) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è invertibile, anche A^3 è invertibile.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Se le immagini $T(\mathbf{V})$ e $S(\mathbf{V})$ di due trasformazioni lineari $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $S : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ coincidono, allora T e S coincidono.

F V b) Se B è una sottomatrice di una matrice reale A allora $\rho(B) \leq \rho(A)$.

F V c) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, coincidono.

F V d) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{13}$ può essere suriettiva.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F V b) Se $m > n$ il sistema lineare $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.

F V c) Se il rango di A è uguale a n allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F V d) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) La somma diretta di due autospazi qualunque di T è un autospazio di T.

F V b) Se A è invertibile e diagonalizzabile per similitudine allora anche A^{-1} lo è.

F V c) Il polinomio caratteristico di T ammette in ogni caso almeno un autovalore reale.

F V d) La somma di due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di T è sempre un autovettore di T associato allo stesso autovalore λ.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 8 sul campo dei numeri reali.

F V a) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcuna base.

F V b) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità 7 è linearmente dipendente.

F V c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ è contenuto in almeno una base di $\mathbf{V}$.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ di dimensione 5, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

6) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$, dei polinomi $p(x)$ nella variabile x di grado minore o uguale a n a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : p(x) \mapsto \mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ denota il polinomio costante uguale a 1.

F **V** b) $T : p(x) \mapsto p(x)$.

F **V** c) $T : p(x) \mapsto \ (p(x))^2$.

F **V** d) $T : p(x) \mapsto \frac{dp}{dx}(x)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a n.

F **V** b) Se A è simmetrica allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** c) T ammette una e una sola base spettrale.

F **V** d) Nessun autovalore di A può avere molteplicità geometrica strettamente inferiore alla sua molteplicità algebrica.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1.

F **V** b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

F **V** c) Se r e s sono due rette di $\mathbb{R}^3$ non parallele, allora sono fra loro incidenti.

F **V** d) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità strettamente maggiore di 3 contiene il vettore nullo.

9) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F **V** b) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

F **V** c) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F **V** d) $\mathbb{R}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri reali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 allora $\dim({}^{\perp}\mathbf{U}) = 1$.

F **V** b) Due basi di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa orientazione se e solo se coincidono.

F **V** c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette infinite rappresentazioni cartesiane distinte.

F **V** d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{v} + 3\mathbf{v} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F **V** a) Date due matrici quadrate reali A e B, si ha che $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.

F **V** b) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F **V** c) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^9$ può essere iniettiva.

F **V** d) Non esistono due matrici quadrate reali $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A+B) = \det A + \det B$.

3) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F **V** b) $\mathbb{C}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri complessi.

F **V** c) Insieme delle matrici 3×3 reali invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

F **V** d) $\mathbb{R}^8[t]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza di polinomi.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente n soluzioni distinte.

F **V** b) L'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F **V** c) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora $\mathbf{S}$ ammette una e una sola soluzione.

F **V** d) Se $\rho(C) < m$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ha almeno un autovalore reale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se T è iniettiva e X è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ allora anche $T(X)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

F V c) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti di T è linearmente indipendente.

F V d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se $-A$ è diagonalizzabile per similitudine.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

F V b) T può non ammettere alcun polinomio caratteristico.

F V c) Se λ è un autovalore di T allora anche 2λ è un autovalore di T.

F V d) Se T è l'identità allora 1 è l'unico autovalore di T.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 9 sul campo dei numeri reali.

F V a) $\mathbf{V}$ è isomorfo allo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^9$.

F V b) Qualunque insieme di 9 vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F V c) $\mathbf{V}$ ammette un numero infinito di basi distinte.

F V d) Può accadere che $\mathbf{V}$ non contenga alcun sottospazio vettoriale.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A^2 è la matrice nulla allora A è la matrice nulla.

F V b) Se A è simmetrica è anche ortogonale.

F V c) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F V d) $\det\left(A^{2012}\right) \geq 0$.

9) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z, t) \mapsto (xy, yz, zt, tx)$.

F V b) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x^2, y^2, z^2, t^2)$.

F V c) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + y, y + z, z + t, t + x)$.

F V d) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1, t + 1)$.

30 gennaio 2012 N. di Matricola: 01001

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A^2 è la matrice nulla allora A è la matrice nulla.

F **V** b) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F **V** c) Se A è simmetrica è anche ortogonale.

F **V** d) $\det\left(A^{2012}\right) \geq 0$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 9 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) $\mathbf{V}$ è isomorfo allo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^9$.

F **V** b) $\mathbf{V}$ ammette un numero infinito di basi distinte.

F **V** c) Qualunque insieme di 9 vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F **V** d) Può accadere che $\mathbf{V}$ non contenga alcun sottospazio vettoriale.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se T ha almeno un autovalore reale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** b) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti di T è linearmente indipendente.

F **V** c) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se $-A$ è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** d) Se T è iniettiva e X è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ allora anche $T(X)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

4) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$, dei polinomi $p(x)$ nella variabile x di grado minore o uguale a n a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : p(x) \mapsto \left(p(x)\right)^2$.

F **V** b) $T : p(x) \mapsto \frac{dp}{dx}(x)$.

F **V** c) $T : p(x) \mapsto \mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ denota il polinomio costante uguale a 1.

F **V** d) $T : p(x) \mapsto p(x)$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F **V** a) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, coincidono.

F **V** b) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{13}$ può essere suriettiva.

F **V** c) Se le immagini $T(\mathbf{V})$ e $S(\mathbf{V})$ di due trasformazioni lineari $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $S : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ coincidono, allora T e S coincidono.

F **V** d) Se B è una sottomatrice di una matrice reale A allora $\rho(B) \leq \rho(A)$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se il rango di A è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F **V** b) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F **V** c) Se il rango di A è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

F **V** d) Se $m > n$ il sistema lineare **S** non può ammettere soluzioni.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

F **V** b) Se λ è un autovalore di T allora anche 2λ è un autovalore di T.

F **V** c) Se T è l'identità allora 1 è l'unico autovalore di T.

F **V** d) T può non ammettere alcun polinomio caratteristico.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Se **U** è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 allora $\dim({}^{\perp}\mathbf{U}) = 1$.

F **V** b) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette infinite rappresentazioni cartesiane distinte.

F **V** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{v} + 3\mathbf{v} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F **V** d) Due basi di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa orientazione se e solo se coincidono.

9) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F **V** b) Insieme delle matrici 3×3 reali invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

F **V** c) $\mathbb{C}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri complessi.

F **V** d) $\mathbb{R}^8[t]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza di polinomi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è invertibile e diagonalizzabile per similitudine allora anche A^{-1} lo è.
F V b) La somma diretta di due autospazi qualunque di T è un autospazio di T.
F V c) La somma di due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di T è sempre un autovettore di T associato allo stesso autovalore λ.
F V d) Il polinomio caratteristico di T ammette in ogni caso almeno un autovalore reale.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora **S** ammette una e una sola soluzione.
F V b) Se $\rho(C) < m$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.
F V c) L'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
F V d) Se $m = n$ allora **S** ammette esattamente n soluzioni distinte.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ esistono matrici aventi traccia negativa e determinante positivo.
F V b) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è invertibile, anche A^3 è invertibile.
F V c) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è ortogonale anche A^2 è ortogonale.
F V d) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $A^2 = I$ allora $A = I$, dove I indica la matrice reale identica 2×2.

4) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.
F V b) $\mathbb{R}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri reali.
F V c) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.
F V d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è simmetrica allora A è diagonalizzabile per similitudine.
F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a n.
F V c) Nessun autovalore di A può avere molteplicità geometrica strettamente inferiore alla sua molteplicità algebrica.
F V d) T ammette una e una sola base spettrale.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

F **V** b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1.

F **V** c) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità strettamente maggiore di 3 contiene il vettore nullo.

F **V** d) Se r e s sono due rette di $\mathbb{R}^3$ non parallele, allora sono fra loro incidenti.

7) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + y, y + z, z + t, t + x)$.

F **V** b) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1, t + 1)$.

F **V** c) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x^2, y^2, z^2, t^2)$.

F **V** d) $T : (x, y, z, t) \mapsto (xy, yz, zt, tx)$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 8 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ è contenuto in almeno una base di $\mathbf{V}$.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ di dimensione 5, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

F **V** c) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità 7 è linearmente dipendente.

F **V** d) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcuna base.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F **V** a) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{2\times5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^9$ può essere iniettiva.

F **V** b) Non esistono due matrici quadrate reali $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.

F **V** c) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F **V** d) Date due matrici quadrate reali A e B, si ha che $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A è simmetrica è anche ortogonale.

F V b) $\det\left(A^{2012}\right) \geq 0$.

F V c) Se A^2 è la matrice nulla allora A è la matrice nulla.

F V d) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

2) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 9 sul campo dei numeri reali.

F V a) Qualunque insieme di 9 vettori linearmente indipendenti di **V** è una base di **V**.

F V b) Può accadere che **V** non contenga alcun sottospazio vettoriale.

F V c) **V** è isomorfo allo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^9$.

F V d) **V** ammette un numero infinito di basi distinte.

3) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$, dei polinomi $p(x)$ nella variabile x di grado minore o uguale a n a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : p(x) \mapsto \ (p(x))^2$.

F V b) $T : p(x) \mapsto p(x)$.

F V c) $T : p(x) \mapsto \frac{dp}{dx}(x)$.

F V d) $T : p(x) \mapsto \mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ denota il polinomio costante uguale a 1.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, coincidono.

F V b) Se B è una sottomatrice di una matrice reale A allora $\rho(B) \leq \rho(A)$.

F V c) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{13}$ può essere suriettiva.

F V d) Se le immagini $T(\mathbf{V})$ e $S(\mathbf{V})$ di due trasformazioni lineari $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $S : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ coincidono, allora T e S coincidono.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1.

F V b) Se r e s sono due rette di $\mathbb{R}^3$ non parallele, allora sono fra loro incidenti.

F V c) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità strettamente maggiore di 3 contiene il vettore nullo.

F V d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

6) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{C}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri complessi.

F V b) $\mathbb{R}^8[t]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza di polinomi.

F V c) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F V d) Insieme delle matrici 3×3 reali invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di A è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F V b) Se $m > n$ il sistema lineare **S** non può ammettere soluzioni.

F V c) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F V d) Se il rango di A è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) La somma diretta di due autospazi qualunque di T è un autospazio di T.

F V b) Il polinomio caratteristico di T ammette in ogni caso almeno un autovalore reale.

F V c) La somma di due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di T è sempre un autovettore di T associato allo stesso autovalore λ.

F V d) Se A è invertibile e diagonalizzabile per similitudine allora anche A^{-1} lo è.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a n.

F V b) T ammette una e una sola base spettrale.

F V c) Nessun autovalore di A può avere molteplicità geometrica strettamente inferiore alla sua molteplicità algebrica.

F V d) Se A è simmetrica allora A è diagonalizzabile per similitudine.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Non esistono due matrici quadrate reali $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A+B) = \det A + \det B$.

F V b) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F V c) Date due matrici quadrate reali A e B, si ha che $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$.

F V d) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^9$ può essere iniettiva.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T è iniettiva e X è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ allora anche $T(X)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

F V b) Se T ha almeno un autovalore reale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se $-A$ è diagonalizzabile per similitudine.

F V d) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti di T è linearmente indipendente.

3) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

F V b) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F V c) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F V d) $\mathbb{R}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri reali.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Due basi di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa orientazione se e solo se coincidono.

F V b) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 allora $\dim(^{\perp}\mathbf{U}) = 1$.

F V c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{v} + 3\mathbf{v} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F V d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette infinite rappresentazioni cartesiane distinte.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 8 sul campo dei numeri reali.

F V a) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità 7 è linearmente dipendente.

F V b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ è contenuto in almeno una base di $\mathbf{V}$.

F V c) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcuna base.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ di dimensione 5, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F **V** a) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è ortogonale anche A^2 è ortogonale.

F **V** b) In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ esistono matrici aventi traccia negativa e determinante positivo.

F **V** c) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $A^2 = I$ allora $A = I$, dove I indica la matrice reale identica 2×2.

F **V** d) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è invertibile, anche A^3 è invertibile.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se $\rho(C) < m$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F **V** b) L'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F **V** c) Se $m = n$ allora **S** ammette esattamente n soluzioni distinte.

F **V** d) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora **S** ammette una e una sola soluzione.

8) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1, t + 1)$.

F **V** b) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x^2, y^2, z^2, t^2)$.

F **V** c) $T : (x, y, z, t) \mapsto (xy, yz, zt, tx)$.

F **V** d) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + y, y + z, z + t, t + x)$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) T può non ammettere alcun polinomio caratteristico.

F **V** b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

F **V** c) Se T è l'identità allora 1 è l'unico autovalore di T.

F **V** d) Se λ è un autovalore di T allora anche 2λ è un autovalore di T.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 8 sul campo dei numeri reali.

F V a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ è contenuto in almeno una base di $\mathbf{V}$.

F V b) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcuna base.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ di dimensione 5, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

F V d) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità 7 è linearmente dipendente.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ha almeno un autovalore reale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se $-A$ è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Se T è iniettiva e X è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ allora anche $T(X)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

F V d) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti di T è linearmente indipendente.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 allora $\dim(^{\perp}\mathbf{U}) = 1$.

F V b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{v} + 3\mathbf{v} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F V c) Due basi di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa orientazione se e solo se coincidono.

F V d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette infinite rappresentazioni cartesiane distinte.

4) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$, dei polinomi $p(x)$ nella variabile x di grado minore o uguale a n a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : p(x) \mapsto \mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ denota il polinomio costante uguale a 1.

F V b) $T : p(x) \mapsto p(x)$.

F V c) $T : p(x) \mapsto \frac{dp}{dx}(x)$.

F V d) $T : p(x) \mapsto \left(p(x)\right)^2$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Se le immagini $T(\mathbf{V})$ e $S(\mathbf{V})$ di due trasformazioni lineari $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $S : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ coincidono, allora T e S coincidono.

F V b) Se B è una sottomatrice di una matrice reale A allora $\rho(B) \le \rho(A)$.

F V c) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{13}$ può essere suriettiva.

F V d) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, coincidono.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se il rango di A è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

F **V** b) Se $m > n$ il sistema lineare **S** non può ammettere soluzioni.

F **V** c) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F **V** d) Se il rango di A è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

F **V** b) Se T è l'identità allora 1 è l'unico autovalore di T.

F **V** c) T può non ammettere alcun polinomio caratteristico.

F **V** d) Se λ è un autovalore di T allora anche 2λ è un autovalore di T.

8) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F **V** b) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F **V** c) $\mathbb{R}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri reali.

F **V** d) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F **V** a) In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ esistono matrici aventi traccia negativa e determinante positivo.

F **V** b) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $A^2 = I$ allora $A = I$, dove I indica la matrice reale identica 2×2.

F **V** c) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è invertibile, anche A^3 è invertibile.

F **V** d) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è ortogonale anche A^2 è ortogonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è simmetrica allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Nessun autovalore di A può avere molteplicità geometrica strettamente inferiore alla sua molteplicità algebrica.

F V c) T ammette una e una sola base spettrale.

F V d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a n.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è invertibile e diagonalizzabile per similitudine allora anche A^{-1} lo è.

F V b) La somma di due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di T è sempre un autovettore di T associato allo stesso autovalore λ.

F V c) Il polinomio caratteristico di T ammette in ogni caso almeno un autovalore reale.

F V d) La somma diretta di due autospazi qualunque di T è un autospazio di T.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) $\det\left(A^{2012}\right) \geq 0$.

F V b) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F V c) Se A è simmetrica è anche ortogonale.

F V d) Se A^2 è la matrice nulla allora A è la matrice nulla.

4) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}^8[t]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza di polinomi.

F V b) Insieme delle matrici 3×3 reali invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

F V c) $\mathbb{C}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri complessi.

F V d) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

5) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 9 sul campo dei numeri reali.

F V a) Può accadere che **V** non contenga alcun sottospazio vettoriale.

F V b) **V** ammette un numero infinito di basi distinte.

F V c) Qualunque insieme di 9 vettori linearmente indipendenti di **V** è una base di **V**.

F V d) **V** è isomorfo allo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^9$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora **S** ammette una e una sola soluzione.

F V b) Se $\rho(C) < m$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F V c) L'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F V d) Se $m = n$ allora **S** ammette esattamente n soluzioni distinte.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^9$ può essere iniettiva.

F V b) Non esistono due matrici quadrate reali $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A+B) = \det A + \det B$.

F V c) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se **U** è isomorfo a **V** e **V** è isomorfo a **W** allora **U** è isomorfo a **W**.

F V d) Date due matrici quadrate reali A e B, si ha che $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.

8) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + y, y + z, z + t, t + x)$.

F V b) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1, t + 1)$.

F V c) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x^2, y^2, z^2, t^2)$.

F V d) $T : (x, y, z, t) \mapsto (xy, yz, zt, tx)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

F V b) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità strettamente maggiore di 3 contiene il vettore nullo.

F V c) Se r e s sono due rette di $\mathbb{R}^3$ non parallele, allora sono fra loro incidenti.

F V d) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$, dei polinomi $p(x)$ nella variabile x di grado minore o uguale a n a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : p(x) \mapsto \mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ denota il polinomio costante uguale a 1.

F V b) $T : p(x) \mapsto \frac{dp}{dx}(x)$.

F V c) $T : p(x) \mapsto \ (p(x))^2$.

F V d) $T : p(x) \mapsto p(x)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di A è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

F V b) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F V c) Se il rango di A è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F V d) Se $m > n$ il sistema lineare **S** non può ammettere soluzioni.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) La somma diretta di due autospazi qualunque di T è un autospazio di T.

F V b) Se A è invertibile e diagonalizzabile per similitudine allora anche A^{-1} lo è.

F V c) La somma di due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di T è sempre un autovettore di T associato allo stesso autovalore λ.

F V d) Il polinomio caratteristico di T ammette in ogni caso almeno un autovalore reale.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Se le immagini $T(\mathbf{V})$ e $S(\mathbf{V})$ di due trasformazioni lineari $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $S : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ coincidono, allora T e S coincidono.

F V b) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{13}$ può essere suriettiva.

F V c) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, coincidono.

F V d) Se B è una sottomatrice di una matrice reale A allora $\rho(B) \leq \rho(A)$.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a n.

F V b) Se A è simmetrica allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Nessun autovalore di A può avere molteplicità geometrica strettamente inferiore alla sua molteplicità algebrica.

F V d) T ammette una e una sola base spettrale.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1.

F **V** b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

F **V** c) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità strettamente maggiore di 3 contiene il vettore nullo.

F **V** d) Se r e s sono due rette di $\mathbb{R}^3$ non parallele, allora sono fra loro incidenti.

7) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F **V** b) $\mathbb{R}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri reali.

F **V** c) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F **V** d) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F **V** a) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $A^2 = I$ allora $A = I$, dove I indica la matrice reale identica 2×2.

F **V** b) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è invertibile, anche A^3 è invertibile.

F **V** c) In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ esistono matrici aventi traccia negativa e determinante positivo.

F **V** d) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è ortogonale anche A^2 è ortogonale.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 8 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcuna base.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ di dimensione 5, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

F **V** c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ è contenuto in almeno una base di $\mathbf{V}$.

F **V** d) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità 7 è linearmente dipendente.

30 gennaio 2012 N. di Matricola: 10000

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A è simmetrica è anche ortogonale.
F V b) $\det\left(A^{2012}\right) \geq 0$.
F V c) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.
F V d) Se A^2 è la matrice nulla allora A è la matrice nulla.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora **S** ammette una e una sola soluzione.
F V b) Se $\rho(C) < m$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.
F V c) Se $m = n$ allora **S** ammette esattamente n soluzioni distinte.
F V d) L'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
F V b) Se T è l'identità allora 1 è l'unico autovalore di T.
F V c) Se λ è un autovalore di T allora anche 2λ è un autovalore di T.
F V d) T può non ammettere alcun polinomio caratteristico.

4) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 9 sul campo dei numeri reali.

F V a) Qualunque insieme di 9 vettori linearmente indipendenti di **V** è una base di **V**.
F V b) Può accadere che **V** non contenga alcun sottospazio vettoriale.
F V c) **V** ammette un numero infinito di basi distinte.
F V d) **V** è isomorfo allo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^9$.

5) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{C}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri complessi.
F V b) $\mathbb{R}^8[t]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza di polinomi.
F V c) Insieme delle matrici 3×3 reali invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.
F V d) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ha almeno un autovalore reale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se $-A$ è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti di T è linearmente indipendente.

F V d) Se T è iniettiva e X è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ allora anche $T(X)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^9$ può essere iniettiva.

F V b) Non esistono due matrici quadrate reali $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A+B) = \det A + \det B$.

F V c) Date due matrici quadrate reali A e B, si ha che $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$.

F V d) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ è isomorfo a $\mathbf{W}$.

8) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + y, y + z, z + t, t + x)$.

F V b) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1, t + 1)$.

F V c) $T : (x, y, z, t) \mapsto (xy, yz, zt, tx)$.

F V d) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x^2, y^2, z^2, t^2)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 allora $\dim(^{\perp}\mathbf{U}) = 1$.

F V b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{v} + 3\mathbf{v} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F V c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette infinite rappresentazioni cartesiane distinte.

F V d) Due basi di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa orientazione se e solo se coincidono.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 9 sul campo dei numeri reali.

F V a) **V** ammette un numero infinito di basi distinte.

F V b) **V** è isomorfo allo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^9$.

F V c) Qualunque insieme di 9 vettori linearmente indipendenti di **V** è una base di **V**.

F V d) Può accadere che **V** non contenga alcun sottospazio vettoriale.

2) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$, dei polinomi $p(x)$ nella variabile x di grado minore o uguale a n a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : p(x) \mapsto p(x)$.

F V b) $T : p(x) \mapsto \mathbf{1}$, dove **1** denota il polinomio costante uguale a 1.

F V c) $T : p(x) \mapsto \left(p(x)\right)^2$.

F V d) $T : p(x) \mapsto \frac{dp}{dx}(x)$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Se B è una sottomatrice di una matrice reale A allora $\rho(B) \leq \rho(A)$.

F V b) Se le immagini $T(\mathbf{V})$ e $S(\mathbf{V})$ di due trasformazioni lineari $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $S : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ coincidono, allora T e S coincidono.

F V c) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, coincidono.

F V d) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{13}$ può essere suriettiva.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $m > n$ il sistema lineare **S** non può ammettere soluzioni.

F V b) Se il rango di A è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

F V c) Se il rango di A è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F V d) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F V b) Se A^2 è la matrice nulla allora A è la matrice nulla.

F V c) Se A è simmetrica è anche ortogonale.

F V d) $\det\left(A^{2012}\right) \geq 0$.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se T è iniettiva e X è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ allora anche $T(X)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

F **V** b) Se T ha almeno un autovalore reale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** c) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se $-A$ è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** d) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti di T è linearmente indipendente.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Due basi di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa orientazione se e solo se coincidono.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 allora $\dim(^\perp\mathbf{U}) = 1$.

F **V** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{v} + 3\mathbf{v} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F **V** d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette infinite rappresentazioni cartesiane distinte.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) T può non ammettere alcun polinomio caratteristico.

F **V** b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

F **V** c) Se T è l'identità allora 1 è l'unico autovalore di T.

F **V** d) Se λ è un autovalore di T allora anche 2λ è un autovalore di T.

9) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) Insieme delle matrici 3×3 reali invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

F **V** b) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F **V** c) $\mathbb{C}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri complessi.

F **V** d) $\mathbb{R}^8[t]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza di polinomi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a n.

F V b) Nessun autovalore di A può avere molteplicità geometrica strettamente inferiore alla sua molteplicità algebrica.

F V c) T ammette una e una sola base spettrale.

F V d) Se A è simmetrica allora A è diagonalizzabile per similitudine.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) La somma diretta di due autospazi qualunque di T è un autospazio di T.

F V b) La somma di due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di T è sempre un autovettore di T associato allo stesso autovalore λ.

F V c) Il polinomio caratteristico di T ammette in ogni caso almeno un autovalore reale.

F V d) Se A è invertibile e diagonalizzabile per similitudine allora anche A^{-1} lo è.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è invertibile, anche A^3 è invertibile.

F V b) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $A^2 = I$ allora $A = I$, dove I indica la matrice reale identica 2×2.

F V c) In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ esistono matrici aventi traccia negativa e determinante positivo.

F V d) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è ortogonale anche A^2 è ortogonale.

4) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri reali.

F V b) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F V c) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F V d) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

5) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z, t) \mapsto (xy, yz, zt, tx)$.

F V b) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x^2, y^2, z^2, t^2)$.

F V c) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + y, y + z, z + t, t + x)$.

F V d) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1, t + 1)$.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 8 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ di dimensione 5, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

F **V** b) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcuna base.

F **V** c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ è contenuto in almeno una base di $\mathbf{V}$.

F **V** d) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità 7 è linearmente dipendente.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1.

F **V** b) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità strettamente maggiore di 3 contiene il vettore nullo.

F **V** c) Se r e s sono due rette di $\mathbb{R}^3$ non parallele, allora sono fra loro incidenti.

F **V** d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F **V** a) Date due matrici quadrate reali A e B, si ha che $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.

F **V** b) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F **V** c) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^9$ può essere iniettiva.

F **V** d) Non esistono due matrici quadrate reali $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente n soluzioni distinte.

F **V** b) L'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F **V** c) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora $\mathbf{S}$ ammette una e una sola soluzione.

F **V** d) Se $\rho(C) < m$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$, dei polinomi $p(x)$ nella variabile x di grado minore o uguale a n a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : p(x) \mapsto \ (p(x))^2$.

F V b) $T : p(x) \mapsto p(x)$.

F V c) $T : p(x) \mapsto \mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ denota il polinomio costante uguale a 1.

F V d) $T : p(x) \mapsto \frac{dp}{dx}(x)$.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è invertibile e diagonalizzabile per similitudine allora anche A^{-1} lo è.

F V b) La somma diretta di due autospazi qualunque di T è un autospazio di T.

F V c) Il polinomio caratteristico di T ammette in ogni caso almeno un autovalore reale.

F V d) La somma di due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di T è sempre un autovettore di T associato allo stesso autovalore λ.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, coincidono.

F V b) Se B è una sottomatrice di una matrice reale A allora $\rho(B) \leq \rho(A)$.

F V c) Se le immagini $T(\mathbf{V})$ e $S(\mathbf{V})$ di due trasformazioni lineari $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $S : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ coincidono, allora T e S coincidono.

F V d) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{13}$ può essere suriettiva.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è simmetrica allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a n.

F V c) T ammette una e una sola base spettrale.

F V d) Nessun autovalore di A può avere molteplicità geometrica strettamente inferiore alla sua molteplicità algebrica.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

F V b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1.

F V c) Se r e s sono due rette di $\mathbb{R}^3$ non parallele, allora sono fra loro incidenti.

F V d) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità strettamente maggiore di 3 contiene il vettore nullo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se il rango di A è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F **V** b) Se $m > n$ il sistema lineare **S** non può ammettere soluzioni.

F **V** c) Se il rango di A è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

F **V** d) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

7) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F **V** b) Insieme delle matrici 3×3 reali invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

F **V** c) $\mathbb{R}^8[t]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza di polinomi.

F **V** d) $\mathbb{C}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri complessi.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A^2 è la matrice nulla allora A è la matrice nulla.

F **V** b) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F **V** c) $\det\left(A^{2012}\right) \geq 0$.

F **V** d) Se A è simmetrica è anche ortogonale.

9) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 9 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) **V** è isomorfo allo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^9$.

F **V** b) **V** ammette un numero infinito di basi distinte.

F **V** c) Può accadere che **V** non contenga alcun sottospazio vettoriale.

F **V** d) Qualunque insieme di 9 vettori linearmente indipendenti di **V** è una base di **V**.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F V b) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F V c) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

F V d) $\mathbb{R}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri reali.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $m = n$ allora **S** ammette esattamente n soluzioni distinte.

F V b) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora **S** ammette una e una sola soluzione.

F V c) L'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F V d) Se $\rho(C) < m$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

3) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 8 sul campo dei numeri reali.

F V a) Può accadere che **V** non ammetta alcuna base.

F V b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di **V** è contenuto in almeno una base di **V**.

F V c) Ogni sottoinsieme di **V** di cardinalità 7 è linearmente dipendente.

F V d) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** di dimensione 5, **U** e **W** hanno in comune almeno un vettore non nullo.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $A^2 = I$ allora $A = I$, dove I indica la matrice reale identica 2×2.

F V b) In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ esistono matrici aventi traccia negativa e determinante positivo.

F V c) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è ortogonale anche A^2 è ortogonale.

F V d) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è invertibile, anche A^3 è invertibile.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Date due matrici quadrate reali A e B, si ha che $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.

F V b) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^9$ può essere iniettiva.

F V c) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se **U** è isomorfo a **V** e **V** è isomorfo a **W** allora **U** è isomorfo a **W**.

F V d) Non esistono due matrici quadrate reali $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.

6) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y, z, t) \mapsto (xy, yz, zt, tx)$.

F **V** b) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + y, y + z, z + t, t + x)$.

F **V** c) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x^2, y^2, z^2, t^2)$.

F **V** d) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1, t + 1)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se λ è un autovalore di T allora anche 2λ è un autovalore di T.

F **V** b) T può non ammettere alcun polinomio caratteristico.

F **V** c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

F **V** d) Se T è l'identità allora 1 è l'unico autovalore di T.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette infinite rappresentazioni cartesiane distinte.

F **V** b) Due basi di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa orientazione se e solo se coincidono.

F **V** c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 allora $\dim(^{\perp}\mathbf{U}) = 1$.

F **V** d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{v} + 3\mathbf{v} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti di T è linearmente indipendente.

F **V** b) Se T è iniettiva e X è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ allora anche $T(X)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

F **V** c) Se T ha almeno un autovalore reale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se $-A$ è diagonalizzabile per similitudine.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ha almeno un autovalore reale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se T è iniettiva e X è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ allora anche $T(X)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

F V c) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se $-A$ è diagonalizzabile per similitudine.

F V d) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti di T è linearmente indipendente.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 allora $\dim(^{\perp}\mathbf{U}) = 1$.

F V b) Due basi di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa orientazione se e solo se coincidono.

F V c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{v} + 3\mathbf{v} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F V d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette infinite rappresentazioni cartesiane distinte.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 8 sul campo dei numeri reali.

F V a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ è contenuto in almeno una base di $\mathbf{V}$.

F V b) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcuna base.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ di dimensione 5, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

F V d) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità 7 è linearmente dipendente.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F V b) Se $m > n$ il sistema lineare $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.

F V c) Se il rango di A è uguale a n allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F V d) Se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

F V b) T può non ammettere alcun polinomio caratteristico.

F V c) Se T è l'identità allora 1 è l'unico autovalore di T.

F V d) Se λ è un autovalore di T allora anche 2λ è un autovalore di T.

6) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F **V** b) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F **V** c) $\mathbb{R}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri reali.

F **V** d) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F **V** a) In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ esistono matrici aventi traccia negativa e determinante positivo.

F **V** b) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $A^2 = I$ allora $A = I$, dove I indica la matrice reale identica 2×2.

F **V** c) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è invertibile, anche A^3 è invertibile.

F **V** d) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è ortogonale anche A^2 è ortogonale.

8) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$, dei polinomi $p(x)$ nella variabile x di grado minore o uguale a n a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : p(x) \mapsto \frac{dp}{dx}(x)$.

F **V** b) $T : p(x) \mapsto p(x)$.

F **V** c) $T : p(x) \mapsto \left(p(x)\right)^2$.

F **V** d) $T : p(x) \mapsto \mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ denota il polinomio costante uguale a 1.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F **V** a) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{3\times4}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{13}$ può essere suriettiva.

F **V** b) Se B è una sottomatrice di una matrice reale A allora $\rho(B) \leq \rho(A)$.

F **V** c) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, coincidono.

F **V** d) Se le immagini $T(\mathbf{V})$ e $S(\mathbf{V})$ di due trasformazioni lineari $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $S : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ coincidono, allora T e S coincidono.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x^2, y^2, z^2, t^2)$.
F V b) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1, t + 1)$.
F V c) $T : (x, y, z, t) \mapsto (xy, yz, zt, tx)$.
F V d) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + y, y + z, z + t, t + x)$.

2) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) Insieme delle matrici 3×3 reali invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.
F V b) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.
F V c) $\mathbb{R}^8[t]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza di polinomi.
F V d) $\mathbb{C}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri complessi.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) L'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
F V b) Se $\rho(C) < m$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.
F V c) Se $m = n$ allora **S** ammette esattamente n soluzioni distinte.
F V d) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora **S** ammette una e una sola soluzione.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità strettamente maggiore di 3 contiene il vettore nullo.
F V b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1.
F V c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
F V d) Se r e s sono due rette di $\mathbb{R}^3$ non parallele, allora sono fra loro incidenti.

5) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 9 sul campo dei numeri reali.

F V a) **V** ammette un numero infinito di basi distinte.
F V b) **V** è isomorfo allo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^9$.
F V c) Può accadere che **V** non contenga alcun sottospazio vettoriale.
F V d) Qualunque insieme di 9 vettori linearmente indipendenti di **V** è una base di **V**.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F V b) Se A^2 è la matrice nulla allora A è la matrice nulla.

F V c) $\det\left(A^{2012}\right) \geq 0$.

F V d) Se A è simmetrica è anche ortogonale.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) La somma di due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di T è sempre un autovettore di T associato allo stesso autovalore λ.

F V b) La somma diretta di due autospazi qualunque di T è un autospazio di T.

F V c) Se A è invertibile e diagonalizzabile per similitudine allora anche A^{-1} lo è.

F V d) Il polinomio caratteristico di T ammette in ogni caso almeno un autovalore reale.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F V b) Non esistono due matrici quadrate reali $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A+B) = \det A + \det B$.

F V c) Date due matrici quadrate reali A e B, si ha che $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$.

F V d) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^9$ può essere iniettiva.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Nessun autovalore di A può avere molteplicità geometrica strettamente inferiore alla sua molteplicità algebrica.

F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a n.

F V c) Se A è simmetrica allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V d) T ammette una e una sola base spettrale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$, dei polinomi $p(x)$ nella variabile x di grado minore o uguale a n a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : p(x) \mapsto \ (p(x))^2$.

F V b) $T : p(x) \mapsto \frac{dp}{dx}(x)$.

F V c) $T : p(x) \mapsto p(x)$.

F V d) $T : p(x) \mapsto \mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ denota il polinomio costante uguale a 1.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, coincidono.

F V b) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{13}$ può essere suriettiva.

F V c) Se B è una sottomatrice di una matrice reale A allora $\rho(B) \leq \rho(A)$.

F V d) Se le immagini $T(\mathbf{V})$ e $S(\mathbf{V})$ di due trasformazioni lineari $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $S : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ coincidono, allora T e S coincidono.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a n.

F V b) Se A è simmetrica allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) T ammette una e una sola base spettrale.

F V d) Nessun autovalore di A può avere molteplicità geometrica strettamente inferiore alla sua molteplicità algebrica.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1.

F V b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

F V c) Se r e s sono due rette di $\mathbb{R}^3$ non parallele, allora sono fra loro incidenti.

F V d) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità strettamente maggiore di 3 contiene il vettore nullo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di A è uguale a n allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F V b) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F V c) Se $m > n$ il sistema lineare $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.

F V d) Se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) La somma diretta di due autospazi qualunque di T è un autospazio di T.

F **V** b) Se A è invertibile e diagonalizzabile per similitudine allora anche A^{-1} lo è.

F **V** c) Il polinomio caratteristico di T ammette in ogni caso almeno un autovalore reale.

F **V** d) La somma di due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di T è sempre un autovettore di T associato allo stesso autovalore λ.

7) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F **V** b) $\mathbb{R}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri reali.

F **V** c) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

F **V** d) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F **V** a) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $A^2 = I$ allora $A = I$, dove I indica la matrice reale identica 2×2.

F **V** b) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è invertibile, anche A^3 è invertibile.

F **V** c) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è ortogonale anche A^2 è ortogonale.

F **V** d) In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ esistono matrici aventi traccia negativa e determinante positivo.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 8 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcuna base.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ di dimensione 5, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

F **V** c) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità 7 è linearmente dipendente.

F **V** d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ è contenuto in almeno una base di $\mathbf{V}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) $\det\left(A^{2012}\right) \geq 0$.

F **V** b) Se A^2 è la matrice nulla allora A è la matrice nulla.

F **V** c) Se A è simmetrica è anche ortogonale.

F **V** d) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

2) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}^8[t]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza di polinomi.

F **V** b) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F **V** c) $\mathbb{C}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri complessi.

F **V** d) Insieme delle matrici 3×3 reali invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

3) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 9 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Può accadere che **V** non contenga alcun sottospazio vettoriale.

F **V** b) **V** è isomorfo allo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^9$.

F **V** c) Qualunque insieme di 9 vettori linearmente indipendenti di **V** è una base di **V**.

F **V** d) **V** ammette un numero infinito di basi distinte.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

F **V** b) Se T è l'identità allora 1 è l'unico autovalore di T.

F **V** c) T può non ammettere alcun polinomio caratteristico.

F **V** d) Se λ è un autovalore di T allora anche 2λ è un autovalore di T.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F **V** a) Date due matrici quadrate reali A e B, si ha che $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.

F **V** b) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se **U** è isomorfo a **V** e **V** è isomorfo a **W** allora **U** è isomorfo a **W**.

F **V** c) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{2\times5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^9$ può essere iniettiva.

F **V** d) Non esistono due matrici quadrate reali $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A+B) = \det A + \det B$.

6) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z, t) \mapsto (xy, yz, zt, tx)$.

F V b) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x^2, y^2, z^2, t^2)$.

F V c) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + y, y + z, z + t, t + x)$.

F V d) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1, t + 1)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ha almeno un autovalore reale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se $-A$ è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Se T è iniettiva e X è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ allora anche $T(X)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

F V d) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti di T è linearmente indipendente.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 allora $\dim(^{\perp}\mathbf{U}) = 1$.

F V b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{v} + 3\mathbf{v} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F V c) Due basi di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa orientazione se e solo se coincidono.

F V d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette infinite rappresentazioni cartesiane distinte.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente n soluzioni distinte.

F V b) L'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F V c) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora $\mathbf{S}$ ammette una e una sola soluzione.

F V d) Se $\rho(C) < m$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, coincidono.

F V b) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{13}$ può essere suriettiva.

F V c) Se B è una sottomatrice di una matrice reale A allora $\rho(B) \leq \rho(A)$.

F V d) Se le immagini $T(\mathbf{V})$ e $S(\mathbf{V})$ di due trasformazioni lineari $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $S : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ coincidono, allora T e S coincidono.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di A è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F V b) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F V c) Se $m > n$ il sistema lineare **S** non può ammettere soluzioni.

F V d) Se il rango di A è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

F V b) T può non ammettere alcun polinomio caratteristico.

F V c) Se λ è un autovalore di T allora anche 2λ è un autovalore di T.

F V d) Se T è l'identità allora 1 è l'unico autovalore di T.

4) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{C}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri complessi.

F V b) $\mathbb{R}^8[t]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza di polinomi.

F V c) Insieme delle matrici 3×3 reali invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

F V d) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ha almeno un autovalore reale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se T è iniettiva e X è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ allora anche $T(X)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

F V c) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti di T è linearmente indipendente.

F V d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se $-A$ è diagonalizzabile per similitudine.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 allora $\dim({}^\perp\mathbf{U}) = 1$.

F **V** b) Due basi di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa orientazione se e solo se coincidono.

F **V** c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette infinite rappresentazioni cartesiane distinte.

F **V** d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{v} + 3\mathbf{v} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è simmetrica è anche ortogonale.

F **V** b) $\det\left(A^{2012}\right) \geq 0$.

F **V** c) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F **V** d) Se A^2 è la matrice nulla allora A è la matrice nulla.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 9 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Qualunque insieme di 9 vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F **V** b) Può accadere che $\mathbf{V}$ non contenga alcun sottospazio vettoriale.

F **V** c) $\mathbf{V}$ ammette un numero infinito di basi distinte.

F **V** d) $\mathbf{V}$ è isomorfo allo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^9$.

9) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$, dei polinomi $p(x)$ nella variabile x di grado minore o uguale a n a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : p(x) \mapsto \left(p(x)\right)^2$.

F **V** b) $T : p(x) \mapsto \frac{dp}{dx}(x)$.

F **V** c) $T : p(x) \mapsto p(x)$.

F **V** d) $T : p(x) \mapsto \mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ denota il polinomio costante uguale a 1.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ esistono matrici aventi traccia negativa e determinante positivo.

F V b) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è ortogonale anche A^2 è ortogonale.

F V c) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è invertibile, anche A^3 è invertibile.

F V d) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $A^2 = I$ allora $A = I$, dove I indica la matrice reale identica 2×2.

2) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F V b) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

F V c) $\mathbb{R}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri reali.

F V d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

3) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x^2, y^2, z^2, t^2)$.

F V b) $T : (x, y, z, t) \mapsto (xy, yz, zt, tx)$.

F V c) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1, t + 1)$.

F V d) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + y, y + z, z + t, t + x)$.

4) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 8 sul campo dei numeri reali.

F V a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di **V** è contenuto in almeno una base di **V**.

F V b) Ogni sottoinsieme di **V** di cardinalità 7 è linearmente dipendente.

F V c) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** di dimensione 5, **U** e **W** hanno in comune almeno un vettore non nullo.

F V d) Può accadere che **V** non ammetta alcuna base.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è simmetrica allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Nessun autovalore di A può avere molteplicità geometrica strettamente inferiore alla sua molteplicità algebrica.

F V c) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a n.

F V d) T ammette una e una sola base spettrale.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è invertibile e diagonalizzabile per similitudine allora anche A^{-1} lo è.

F V b) La somma di due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di T è sempre un autovettore di T associato allo stesso autovalore λ.

F V c) La somma diretta di due autospazi qualunque di T è un autospazio di T.

F V d) Il polinomio caratteristico di T ammette in ogni caso almeno un autovalore reale.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) L'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F V b) Se $m = n$ allora **S** ammette esattamente n soluzioni distinte.

F V c) Se $\rho(C) < m$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F V d) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora **S** ammette una e una sola soluzione.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

F V b) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità strettamente maggiore di 3 contiene il vettore nullo.

F V c) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1.

F V d) Se r e s sono due rette di $\mathbb{R}^3$ non parallele, allora sono fra loro incidenti.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F V b) Date due matrici quadrate reali A e B, si ha che $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$.

F V c) Non esistono due matrici quadrate reali $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A+B) = \det A + \det B$.

F V d) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^9$ può essere iniettiva.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) La somma di due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di T è sempre un autovettore di T associato allo stesso autovalore λ.

F V b) La somma diretta di due autospazi qualunque di T è un autospazio di T.

F V c) Il polinomio caratteristico di T ammette in ogni caso almeno un autovalore reale.

F V d) Se A è invertibile e diagonalizzabile per similitudine allora anche A^{-1} lo è.

2) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$, dei polinomi $p(x)$ nella variabile x di grado minore o uguale a n a coefficienti reali, a se stesso sono lineari.

F V a) $T : p(x) \mapsto p(x)$.

F V b) $T : p(x) \mapsto \ (p(x))^2$.

F V c) $T : p(x) \mapsto \frac{dp}{dx}(x)$.

F V d) $T : p(x) \mapsto \mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ denota il polinomio costante uguale a 1.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Se B è una sottomatrice di una matrice reale A allora $\rho(B) \leq \rho(A)$.

F V b) Se due spazi vettoriali reali di dimensioni finite sono isomorfi, coincidono.

F V c) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{13}$ può essere suriettiva.

F V d) Se le immagini $T(\mathbf{V})$ e $S(\mathbf{V})$ di due trasformazioni lineari $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $S : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ coincidono, allora T e S coincidono.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di cardinalità strettamente maggiore di 3 contiene il vettore nullo.

F V b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1.

F V c) Se r e s sono due rette di $\mathbb{R}^3$ non parallele, allora sono fra loro incidenti.

F V d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

5) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) Insieme delle matrici 3×3 reali invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

F V b) $\mathbb{C}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri complessi.

F V c) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F V d) $\mathbb{R}^8[t]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza di polinomi.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F **V** b) Se A è simmetrica è anche ortogonale.

F **V** c) Se A^2 è la matrice nulla allora A è la matrice nulla.

F **V** d) $\det\left(A^{2012}\right) \geq 0$.

7) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 9 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) **V** ammette un numero infinito di basi distinte.

F **V** b) Qualunque insieme di 9 vettori linearmente indipendenti di **V** è una base di **V**.

F **V** c) **V** è isomorfo allo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^9$.

F **V** d) Può accadere che **V** non contenga alcun sottospazio vettoriale.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Nessun autovalore di A può avere molteplicità geometrica strettamente inferiore alla sua molteplicità algebrica.

F **V** b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a n.

F **V** c) T ammette una e una sola base spettrale.

F **V** d) Se A è simmetrica allora A è diagonalizzabile per similitudine.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se $m > n$ il sistema lineare **S** non può ammettere soluzioni.

F **V** b) Se il rango di A è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F **V** c) **S** ammette soluzioni se e solo se $m = n$.

F **V** d) Se il rango di A è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T è l'identità allora 1 è l'unico autovalore di T.

F V b) Se λ è un autovalore di T allora anche 2λ è un autovalore di T.

F V c) T può non ammettere alcun polinomio caratteristico.

F V d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è invertibile, anche A^3 è invertibile.

F V b) In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ esistono matrici aventi traccia negativa e determinante positivo.

F V c) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e A è ortogonale anche A^2 è ortogonale.

F V d) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $A^2 = I$ allora $A = I$, dove I indica la matrice reale identica 2×2.

3) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 8 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** di dimensione 5, **U** e **W** hanno in comune almeno un vettore non nullo.

F V b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di **V** è contenuto in almeno una base di **V**.

F V c) Ogni sottoinsieme di **V** di cardinalità 7 è linearmente dipendente.

F V d) Può accadere che **V** non ammetta alcuna base.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se $-A$ è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti di T è linearmente indipendente.

F V c) Se T è iniettiva e X è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ allora anche $T(X)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

F V d) Se T ha almeno un autovalore reale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

F V a) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se **U** è isomorfo a **V** e **V** è isomorfo a **W** allora **U** è isomorfo a **W**.

F V b) Nessuna trasformazione lineare da $\mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^9$ può essere iniettiva.

F V c) Non esistono due matrici quadrate reali $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A+B) = \det A + \det B$.

F V d) Date due matrici quadrate reali A e B, si ha che $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$.

6) Si dica quali fra le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x^2, y^2, z^2, t^2)$.

F **V** b) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + y, y + z, z + t, t + x)$.

F **V** c) $T : (x, y, z, t) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1, t + 1)$.

F **V** d) $T : (x, y, z, t) \mapsto (xy, yz, zt, tx)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) L'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

F **V** b) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora **S** ammette una e una sola soluzione.

F **V** c) Se $\rho(C) < m$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F **V** d) Se $m = n$ allora **S** ammette esattamente n soluzioni distinte.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $3\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{v} + 3\mathbf{v} \wedge 2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo).

F **V** b) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette infinite rappresentazioni cartesiane distinte.

F **V** c) Due basi di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa orientazione se e solo se coincidono.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 allora $\dim({}^{\perp}\mathbf{U}) = 1$.

9) Si dica quali dei seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri reali.

F **V** b) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

F **V** c) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

F **V** d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.