Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma.

F V b) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di polinomi.

F V c) Insieme delle permutazioni su n oggetti rispetto alla usuale composizione di applicazioni.

F V d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alla usuale operazione di somma di polinomi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante positivo.

F V b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ è una matrice triangolare e $a^1_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

F V c) Tutte le matrici reali quadrate invertibili hanno determinante non nullo.

F V d) Non esistono matrici simmetriche e ortogonali.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora esiste una ed una sola n-upla $(x_1, \dots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$.

F V b) Se X è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|X| \leq |Y|$ (con $|X|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di X e la cardinalità di Y).

F V c) Se $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F V d) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sottospazio vettoriale.

4) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo $n \geq 10$.

F V a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, x_1)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (nx_1, nx_2, \dots, nx_{n-2}, nx_{n-1}, nx_n)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_5, 0, \dots, 0, 0, 0)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Esistono infinite trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^8[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

F V b) Tutti gli spazi vettoriali reali hanno dimensione finita.

F V c) Se B è una matrice ortogonale $n \times n$ allora il suo rango è n.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = T(\mathbf{U}) \cap T(\mathbf{W})$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora ammette soluzione.

F V b) Se il rango di C è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F V c) Se A è una matrice simmetrica allora **S** ammette soluzione.

F V d) Se il rango di C è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T è l'applicazione lineare nulla allora 0 è l'unico autovalore di T.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F V c) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica non invertibile allora ha un autovalore nullo.

F V d) Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è invertibile allora A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se A è simmetrica allora ammette n autovalori distinti.

F V c) Se A è ortogonale, n è dispari e $\det A = 1$ allora 1 è un autovalore di A.

F V d) Se $\rho(A) = n$ allora T ammette una base spettrale.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = -\tilde{\mathbf{e}}_1$.

F V b) Se **U** è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V c) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $\rho(A) < \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F V b) Se $m = n$ e $\det A = 0$ allora **S** non ammette soluzioni.

F V c) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni di **S** allora $(x'_1 - x_1, \dots, x'_n - x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F V d) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = n$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Esistono rette r e s di $\mathbb{R}^3$ che non sono fra loro né parallele né incidenti.

F V b) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(1, 1, 1)$.

F V c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora il prodotto scalare fra $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è uguale a 0.

F V d) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1 e sono a due a due ortogonali.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) T ammette almeno una base spettrale.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F V c) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è uguale a n.

4) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo che n sia un numero pari non inferiore a 10.

F V a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (0, x_2, 0, x_4, \dots, x_{n-2}, 0, x_n)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot (1, 1, 1, \dots, 1)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è diagonale e invertibile anche la sua inversa è diagonale.

F **V** b) Se A è diagonale anche la sua trasposta è diagonale.

F **V** c) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{4024}\right) = 0$.

F **V** d) Se A ha traccia nulla allora A^2 ha traccia nulla.

6) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) Insieme delle matrici 5×5 reali invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto di matrici.

F **V** b) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri complessi.

F **V** c) $M_7(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F **V** d) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A + \mu B) = \lambda \det A + \mu \det B$.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari iniettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

F **V** c) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F **V** d) Se due matrici quadrate reali A e B sono simili, si ha che $\rho(A) = \rho(B)$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F **V** a) $\mathbf{V}$ ammette una e una sola base.

F **V** b) Qualunque insieme di n vettori che sia un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F **V** c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$.

F **V** d) $\mathbf{V} + \mathbf{V} = \mathbf{V}$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente inferiore a n.

F **V** b) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare identica.

F **V** c) Se n è pari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** d) Può accadere che T ammetta un numero infinito di autovalori distinti.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Non esistono matrici simmetriche e ortogonali.

F V b) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante positivo.

F V c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ è una matrice triangolare e $a^1_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

F V d) Tutte le matrici reali quadrate invertibili hanno determinante non nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = T(\mathbf{U}) \cap T(\mathbf{W})$.

F V b) Se B è una matrice ortogonale $n \times n$ allora il suo rango è n.

F V c) Tutti gli spazi vettoriali reali hanno dimensione finita.

F V d) Esistono infinite trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^8[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di C è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F V b) Se A è una matrice simmetrica allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F V c) Se il rango di C è uguale a n allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F V d) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette soluzione.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Può accadere che T ammetta un numero infinito di autovalori distinti.

F V b) Se n è pari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente inferiore a n.

F V d) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare identica.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sottospazio vettoriale.

F V b) Se $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora esiste una ed una sola n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$.

F V c) Se X è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|X| \leq |Y|$ (con $|X|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di X e la cardinalità di Y).

F V d) Se $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

6) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo $n \geq 10$.

F V a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_5, 0, \dots, 0, 0, 0)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (nx_1, nx_2, \dots, nx_{n-2}, nx_{n-1}, nx_n)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, x_1)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è uguale a n.

F V b) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) T ammette almeno una base spettrale.

F V d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1 e sono a due a due ortogonali.

F V b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora il prodotto scalare fra $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è uguale a 0.

F V c) Esistono rette r e s di $\mathbb{R}^3$ che non sono fra loro né parallele né incidenti.

F V d) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(1, 1, 1)$.

9) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alla usuale operazione di somma di polinomi.

F V b) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma.

F V c) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di polinomi.

F V d) Insieme delle permutazioni su n oggetti rispetto alla usuale composizione di applicazioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora $^\perp\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V c) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

F V d) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = -\tilde{\mathbf{e}}_1$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se due matrici quadrate reali A e B sono simili, si ha che $\rho(A) = \rho(B)$.

F V b) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari iniettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

F V d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A + \mu B) = \lambda \det A + \mu \det B$.

3) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F V b) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri complessi.

F V c) Insieme delle matrici 5×5 reali invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto di matrici.

F V d) $M_7(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Supponiamo che $\mathbf{S}$ ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = n$.

F V b) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $(x'_1 - x_1, \dots, x'_n - x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V c) Se $m = n$ e $\det A = 0$ allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

F V d) Se $\rho(A) < \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se A è simmetrica allora ammette n autovalori distinti.

F **V** b) Se A è ortogonale, n è dispari e $\det A = 1$ allora 1 è un autovalore di A.

F **V** c) Se $\rho(A) = n$ allora T ammette una base spettrale.

F **V** d) Se A è invertibile allora A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F **V** b) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica non invertibile allora ha un autovalore nullo.

F **V** c) Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.

F **V** d) Se T è l'applicazione lineare nulla allora 0 è l'unico autovalore di T.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F **V** a) $\mathbf{V} + \mathbf{V} = \mathbf{V}$.

F **V** b) Qualunque insieme di n vettori che sia un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F **V** c) $\mathbf{V}$ ammette una e una sola base.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A ha traccia nulla allora A^2 ha traccia nulla.

F **V** b) Se A è diagonale anche la sua trasposta è diagonale.

F **V** c) Se A è diagonale e invertibile anche la sua inversa è diagonale.

F **V** d) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{4024}\right) = 0$.

9) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo che n sia un numero pari non inferiore a 10.

F **V** a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$.

F **V** b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot (1, 1, 1, \dots, 1)$.

F **V** c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (0, x_2, 0, x_4, \dots, x_{n-2}, 0, x_n)$.

F **V** d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

F V a) Se A ha traccia nulla allora A^2 ha traccia nulla.

F V b) Se A è diagonale e invertibile anche la sua inversa è diagonale.

F V c) Se A è diagonale anche la sua trasposta è diagonale.

F V d) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{4024}\right) = 0$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) $\mathbf{V} + \mathbf{V} = \mathbf{V}$.

F V b) $\mathbf{V}$ ammette una e una sola base.

F V c) Qualunque insieme di n vettori che sia un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è simmetrica allora ammette n autovalori distinti.

F V b) Se $\rho(A) = n$ allora T ammette una base spettrale.

F V c) Se A è invertibile allora A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

F V d) Se A è ortogonale, n è dispari e $\det A = 1$ allora 1 è un autovalore di A.

4) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo $n \geq 10$.

F V a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (nx_1, nx_2, \dots, nx_{n-2}, nx_{n-1}, nx_n)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, x_1)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_5, 0, \dots, 0, 0, 0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Tutti gli spazi vettoriali reali hanno dimensione finita.

F V b) Esistono infinite trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^8[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = T(\mathbf{U}) \cap T(\mathbf{W})$.

F V d) Se B è una matrice ortogonale $n \times n$ allora il suo rango è n.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se il rango di C è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F **V** b) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora ammette soluzione.

F **V** c) Se il rango di C è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

F **V** d) Se A è una matrice simmetrica allora **S** ammette soluzione.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F **V** b) Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.

F **V** c) Se T è l'applicazione lineare nulla allora 0 è l'unico autovalore di T.

F **V** d) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica non invertibile allora ha un autovalore nullo.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) Se **U** è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** b) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

F **V** c) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = -\tilde{\mathbf{e}}_1$.

F **V** d) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

9) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F **V** b) Insieme delle matrici 5×5 reali invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto di matrici.

F **V** c) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri complessi.

F **V** d) $M_7(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se n è pari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Può accadere che T ammetta un numero infinito di autovalori distinti.

F V c) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare identica.

F V d) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente inferiore a n.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $m = n$ e $\det A = 0$ allora **S** non ammette soluzioni.

F V b) Se $\rho(A) < \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F V c) Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sono due soluzioni di **S** allora $(x'_1 - x_1, \ldots, x'_n - x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F V d) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ è una matrice triangolare e $a^1_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

F V b) Tutte le matrici reali quadrate invertibili hanno determinante non nullo.

F V c) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante positivo.

F V d) Non esistono matrici simmetriche e ortogonali.

4) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di polinomi.

F V b) Insieme delle permutazioni su n oggetti rispetto alla usuale composizione di applicazioni.

F V c) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma.

F V d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alla usuale operazione di somma di polinomi.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è uguale a n.

F V c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F V d) T ammette almeno una base spettrale.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora il prodotto scalare fra $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è uguale a 0.

F V b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1 e sono a due a due ortogonali.

F V c) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(1, 1, 1)$.

F V d) Esistono rette r e s di $\mathbb{R}^3$ che non sono fra loro né parallele né incidenti.

7) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo che n sia un numero pari non inferiore a 10.

F V a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (0, x_2, 0, x_4, \dots, x_{n-2}, 0, x_n)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (\sum_{i=1}^{n} x_i) \cdot (1, 1, 1, \dots, 1)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se X è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|X| \leq |Y|$ (con $|X|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di X e la cardinalità di Y).

F V b) Se $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F V c) Se $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora esiste una ed una sola n-upla $(x_1, \dots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$.

F V d) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sottospazio vettoriale.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari iniettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

F V b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A + \mu B) = \lambda \det A + \mu \det B$.

F V c) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F V d) Se due matrici quadrate reali A e B sono simili, si ha che $\rho(A) = \rho(B)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

F V a) Se A è diagonale anche la sua trasposta è diagonale.

F V b) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{4024}\right) = 0$.

F V c) Se A ha traccia nulla allora A^2 ha traccia nulla.

F V d) Se A è diagonale e invertibile anche la sua inversa è diagonale.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Qualunque insieme di n vettori che sia un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F V b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$.

F V c) $\mathbf{V} + \mathbf{V} = \mathbf{V}$.

F V d) $\mathbf{V}$ ammette una e una sola base.

3) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo $n \geq 10$.

F V a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (nx_1, nx_2, \dots, nx_{n-2}, nx_{n-1}, nx_n)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_5, 0, \dots, 0, 0, 0)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, x_1)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Tutti gli spazi vettoriali reali hanno dimensione finita.

F V b) Se B è una matrice ortogonale $n \times n$ allora il suo rango è n.

F V c) Esistono infinite trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^8[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = T(\mathbf{U}) \cap T(\mathbf{W})$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1 e sono a due a due ortogonali.

F V b) Esistono rette r e s di $\mathbb{R}^3$ che non sono fra loro né parallele né incidenti.

F V c) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(1, 1, 1)$.

F V d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora il prodotto scalare fra $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è uguale a 0.

6) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri complessi.

F V b) $M_7(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F V c) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F V d) Insieme delle matrici 5×5 reali invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto di matrici.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di C è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F V b) Se A è una matrice simmetrica allora **S** ammette soluzione.

F V c) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora ammette soluzione.

F V d) Se il rango di C è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Può accadere che T ammetta un numero infinito di autovalori distinti.

F V b) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente inferiore a n.

F V c) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare identica.

F V d) Se n è pari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è uguale a n.

F V b) T ammette almeno una base spettrale.

F V c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F V d) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A + \mu B) = \lambda \det A + \mu \det B$.

F V b) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F V c) Se due matrici quadrate reali A e B sono simili, si ha che $\rho(A) = \rho(B)$.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari iniettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è ortogonale, n è dispari e $\det A = 1$ allora 1 è un autovalore di A.

F V b) Se A è simmetrica allora ammette n autovalori distinti.

F V c) Se A è invertibile allora A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

F V d) Se $\rho(A) = n$ allora T ammette una base spettrale.

3) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma.

F V b) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di polinomi.

F V c) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alla usuale operazione di somma di polinomi.

F V d) Insieme delle permutazioni su n oggetti rispetto alla usuale composizione di applicazioni.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V b) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V c) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = -\tilde{\mathbf{e}}_1$.

F V d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora esiste una ed una sola n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$.

F V b) Se X è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|X| \leq |Y|$ (con $|X|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di X e la cardinalità di Y).

F V c) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sottospazio vettoriale.

F V d) Se $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante positivo.

F V b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ è una matrice triangolare e $a^1_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

F V c) Non esistono matrici simmetriche e ortogonali.

F V d) Tutte le matrici reali quadrate invertibili hanno determinante non nullo.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $\rho(A) < \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F V b) Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $(x'_1 - x_1, \ldots, x'_n - x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V c) Supponiamo che $\mathbf{S}$ ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = n$.

F V d) Se $m = n$ e $\det A = 0$ allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

8) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo che n sia un numero pari non inferiore a 10.

F V a) $T : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot (1, 1, 1, \ldots, 1)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (0, x_2, 0, x_4, \ldots, x_{n-2}, 0, x_n)$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica non invertibile allora ha un autovalore nullo.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F V c) Se T è l'applicazione lineare nulla allora 0 è l'unico autovalore di T.

F V d) Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.

13 Febbraio 2012 N. di Matricola: 01101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se X è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|X| \leq |Y|$ (con $|X|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di X e la cardinalità di Y).

F V b) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sottospazio vettoriale.

F V c) Se $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F V d) Se $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora esiste una ed una sola n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è simmetrica allora ammette n autovalori distinti.

F V b) Se A è invertibile allora A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Se A è ortogonale, n è dispari e $\det A = 1$ allora 1 è un autovalore di A.

F V d) Se $\rho(A) = n$ allora T ammette una base spettrale.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = -\tilde{\mathbf{e}}_1$.

F V c) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

4) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo $n \geq 10$.

F V a) $T : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \ldots, x_{n-1} + x_n, x_n)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_5, 0, \ldots, 0, 0, 0)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_1)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (nx_1, nx_2, \ldots, nx_{n-2}, nx_{n-1}, nx_n)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = T(\mathbf{U}) \cap T(\mathbf{W})$.

F **V** b) Se B è una matrice ortogonale $n \times n$ allora il suo rango è n.

F **V** c) Esistono infinite trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^8[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

F **V** d) Tutti gli spazi vettoriali reali hanno dimensione finita.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se il rango di C è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F **V** b) Se A è una matrice simmetrica allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F **V** c) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette soluzione.

F **V** d) Se il rango di C è uguale a n allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F **V** b) Se T è l'applicazione lineare nulla allora 0 è l'unico autovalore di T.

F **V** c) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica non invertibile allora ha un autovalore nullo.

F **V** d) Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.

8) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di polinomi.

F **V** b) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alla usuale operazione di somma di polinomi.

F **V** c) Insieme delle permutazioni su n oggetti rispetto alla usuale composizione di applicazioni.

F **V** d) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ è una matrice triangolare e $a^1_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

F **V** b) Non esistono matrici simmetriche e ortogonali.

F **V** c) Tutte le matrici reali quadrate invertibili hanno determinante non nullo.

F **V** d) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante positivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F V c) T ammette almeno una base spettrale.

F V d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è uguale a n.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se n è pari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare identica.

F V c) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente inferiore a n.

F V d) Può accadere che T ammetta un numero infinito di autovalori distinti.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

F V a) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{4024}\right) = 0$.

F V b) Se A è diagonale e invertibile anche la sua inversa è diagonale.

F V c) Se A è diagonale anche la sua trasposta è diagonale.

F V d) Se A ha traccia nulla allora A^2 ha traccia nulla.

4) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $M_7(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F V b) Insieme delle matrici 5×5 reali invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto di matrici.

F V c) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri complessi.

F V d) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$.

F V b) $\mathbf{V}$ ammette una e una sola base.

F V c) Qualunque insieme di n vettori che sia un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F V d) $\mathbf{V} + \mathbf{V} = \mathbf{V}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $m = n$ e $\det A = 0$ allora **S** non ammette soluzioni.

F V b) Se $\rho(A) < \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F V c) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni di **S** allora $(x'_1 - x_1, \dots, x'_n - x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F V d) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = n$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se **U** e **V** sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari iniettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora **U** e **V** sono isomorfi.

F V b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A + \mu B) = \lambda \det A + \mu \det B$.

F V c) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se **U** non è isomorfo a **V** e **V** non è isomorfo a **W** allora **U** non è isomorfo a **W**.

F V d) Se due matrici quadrate reali A e B sono simili, si ha che $\rho(A) = \rho(B)$.

8) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo che n sia un numero pari non inferiore a 10.

F V a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (0, x_2, 0, x_4, \dots, x_{n-2}, 0, x_n)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot (1, 1, 1, \dots, 1)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora il prodotto scalare fra $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è uguale a 0.

F V b) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(1, 1, 1)$.

F V c) Esistono rette r e s di $\mathbb{R}^3$ che non sono fra loro né parallele né incidenti.

F V d) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1 e sono a due a due ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo $n \geq 10$.

F V a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, x_1)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (nx_1, nx_2, \dots, nx_{n-2}, nx_{n-1}, nx_n)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_5, 0, \dots, 0, 0, 0)$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di C è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

F V b) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora ammette soluzione.

F V c) Se il rango di C è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F V d) Se A è una matrice simmetrica allora **S** ammette soluzione.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Può accadere che T ammetta un numero infinito di autovalori distinti.

F V b) Se n è pari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare identica.

F V d) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente inferiore a n.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = T(\mathbf{U}) \cap T(\mathbf{W})$.

F V b) Esistono infinite trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^8[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

F V c) Tutti gli spazi vettoriali reali hanno dimensione finita.

F V d) Se B è una matrice ortogonale $n \times n$ allora il suo rango è n.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è uguale a n.

F V b) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F V d) T ammette almeno una base spettrale.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1 e sono a due a due ortogonali.

F V b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora il prodotto scalare fra $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è uguale a 0.

F V c) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(1, 1, 1)$.

F V d) Esistono rette r e s di $\mathbb{R}^3$ che non sono fra loro né parallele né incidenti.

7) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alla usuale operazione di somma di polinomi.

F V b) Insieme delle permutazioni su n oggetti rispetto alla usuale composizione di applicazioni.

F V c) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di polinomi.

F V d) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Non esistono matrici simmetriche e ortogonali.

F V b) Tutte le matrici reali quadrate invertibili hanno determinante non nullo.

F V c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ è una matrice triangolare e $a^1_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

F V d) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante positivo.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sottospazio vettoriale.

F V b) Se $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F V c) Se X è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|X| \leq |Y|$ (con $|X|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di X e la cardinalità di Y).

F V d) Se $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora esiste una ed una sola n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$.

13 Febbraio 2012 N. di Matricola: 10000

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

F V a) Se A è diagonale anche la sua trasposta è diagonale.

F V b) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{4024}\right) = 0$.

F V c) Se A è diagonale e invertibile anche la sua inversa è diagonale.

F V d) Se A ha traccia nulla allora A^2 ha traccia nulla.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $m = n$ e $\det A = 0$ allora **S** non ammette soluzioni.

F V b) Se $\rho(A) < \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F V c) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = n$.

F V d) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni di **S** allora $(x'_1 - x_1, \dots, x'_n - x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F V b) Se T è l'applicazione lineare nulla allora 0 è l'unico autovalore di T.

F V c) Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.

F V d) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica non invertibile allora ha un autovalore nullo.

4) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Qualunque insieme di n vettori che sia un sistema di generatori per **V** è una base di **V**.

F V b) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** si ha che $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$.

F V c) **V** ammette una e una sola base.

F V d) $\mathbf{V} + \mathbf{V} = \mathbf{V}$.

5) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri complessi.

F **V** b) $M_7(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F **V** c) Insieme delle matrici 5×5 reali invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto di matrici.

F **V** d) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se A è simmetrica allora ammette n autovalori distinti.

F **V** b) Se A è invertibile allora A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** c) Se $\rho(A) = n$ allora T ammette una base spettrale.

F **V** d) Se A è ortogonale, n è dispari e $\det A = 1$ allora 1 è un autovalore di A.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari iniettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

F **V** b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A + \mu B) = \lambda \det A + \mu \det B$.

F **V** c) Se due matrici quadrate reali A e B sono simili, si ha che $\rho(A) = \rho(B)$.

F **V** d) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$.

8) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo che n sia un numero pari non inferiore a 10.

F **V** a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (0, x_2, 0, x_4, \dots, x_{n-2}, 0, x_n)$.

F **V** b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1)$.

F **V** c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$.

F **V** d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot (1, 1, 1, \dots, 1)$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** b) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = -\tilde{\mathbf{e}}_1$.

F **V** c) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

F **V** d) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) **V** ammette una e una sola base.

F V b) $\mathbf{V} + \mathbf{V} = \mathbf{V}$.

F V c) Qualunque insieme di n vettori che sia un sistema di generatori per **V** è una base di **V**.

F V d) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** si ha che $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$.

2) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo $n \geq 10$.

F V a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_5, 0, \dots, 0, 0, 0)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (nx_1, nx_2, \dots, nx_{n-2}, nx_{n-1}, nx_n)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, x_1)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se B è una matrice ortogonale $n \times n$ allora il suo rango è n.

F V b) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale **V** e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = T(\mathbf{U}) \cap T(\mathbf{W})$.

F V c) Tutti gli spazi vettoriali reali hanno dimensione finita.

F V d) Esistono infinite trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^8[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se A è una matrice simmetrica allora **S** ammette soluzione.

F V b) Se il rango di C è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

F V c) Se il rango di C è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F V d) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora ammette soluzione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

F V a) Se A è diagonale e invertibile anche la sua inversa è diagonale.

F V b) Se A ha traccia nulla allora A^2 ha traccia nulla.

F V c) Se A è diagonale anche la sua trasposta è diagonale.

F V d) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{4024}\right) = 0$.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se A è ortogonale, n è dispari e $\det A = 1$ allora 1 è un autovalore di A.

F **V** b) Se A è simmetrica allora ammette n autovalori distinti.

F **V** c) Se A è invertibile allora A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** d) Se $\rho(A) = n$ allora T ammette una base spettrale.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** c) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = -\tilde{\mathbf{e}}_1$.

F **V** d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica non invertibile allora ha un autovalore nullo.

F **V** b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F **V** c) Se T è l'applicazione lineare nulla allora 0 è l'unico autovalore di T.

F **V** d) Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.

9) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) Insieme delle matrici 5×5 reali invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto di matrici.

F **V** b) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F **V** c) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri complessi.

F **V** d) $M_7(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è uguale a n.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F V c) T ammette almeno una base spettrale.

F V d) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Può accadere che T ammetta un numero infinito di autovalori distinti.

F V b) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare identica.

F V c) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente inferiore a n.

F V d) Se n è pari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Tutte le matrici reali quadrate invertibili hanno determinante non nullo.

F V b) Non esistono matrici simmetriche e ortogonali.

F V c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ è una matrice triangolare e $a^1_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

F V d) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante positivo.

4) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) Insieme delle permutazioni su n oggetti rispetto alla usuale composizione di applicazioni.

F V b) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alla usuale operazione di somma di polinomi.

F V c) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di polinomi.

F V d) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma.

5) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo che n sia un numero pari non inferiore a 10.

F V a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot (1, 1, 1, \dots, 1)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (0, x_2, 0, x_4, \dots, x_{n-2}, 0, x_n)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1)$.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F V b) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sottospazio vettoriale.

F V c) Se X è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|X| \leq |Y|$ (con $|X|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di X e la cardinalità di Y).

F V d) Se $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora esiste una ed una sola n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1 e sono a due a due ortogonali.

F V b) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(1, 1, 1)$.

F V c) Esistono rette r e s di $\mathbb{R}^3$ che non sono fra loro né parallele né incidenti.

F V d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora il prodotto scalare fra $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è uguale a 0.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se due matrici quadrate reali A e B sono simili, si ha che $\rho(A) = \rho(B)$.

F V b) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari iniettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

F V d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A + \mu B) = \lambda \det A + \mu \det B$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Supponiamo che $\mathbf{S}$ ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = n$.

F V b) Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $(x'_1 - x_1, \ldots, x'_n - x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V c) Se $m = n$ e $\det A = 0$ allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

F V d) Se $\rho(A) < \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo $n \geq 10$.

F V a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (nx_1, nx_2, \dots, nx_{n-2}, nx_{n-1}, nx_n)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_5, 0, \dots, 0, 0, 0)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, x_1)$.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se n è pari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Può accadere che T ammetta un numero infinito di autovalori distinti.

F V c) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente inferiore a n.

F V d) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare identica.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Tutti gli spazi vettoriali reali hanno dimensione finita.

F V b) Se B è una matrice ortogonale $n \times n$ allora il suo rango è n.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = T(\mathbf{U}) \cap T(\mathbf{W})$.

F V d) Esistono infinite trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^8[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è uguale a n.

F V c) T ammette almeno una base spettrale.

F V d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora il prodotto scalare fra $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è uguale a 0.

F V b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1 e sono a due a due ortogonali.

F V c) Esistono rette r e s di $\mathbb{R}^3$ che non sono fra loro né parallele né incidenti.

F V d) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(1, 1, 1)$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di C è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F V b) Se A è una matrice simmetrica allora **S** ammette soluzione.

F V c) Se il rango di C è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

F V d) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora ammette soluzione.

7) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F V b) Insieme delle matrici 5×5 reali invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto di matrici.

F V c) $M_7(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F V d) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri complessi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

F V a) Se A ha traccia nulla allora A^2 ha traccia nulla.

F V b) Se A è diagonale e invertibile anche la sua inversa è diagonale.

F V c) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{4024}\right) = 0$.

F V d) Se A è diagonale anche la sua trasposta è diagonale.

9) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) $\mathbf{V} + \mathbf{V} = \mathbf{V}$.

F V b) **V** ammette una e una sola base.

F V c) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** si ha che $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$.

F V d) Qualunque insieme di n vettori che sia un sistema di generatori per **V** è una base di **V**.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alla usuale operazione di somma di polinomi.
F V b) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di polinomi.
F V c) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma.
F V d) Insieme delle permutazioni su n oggetti rispetto alla usuale composizione di applicazioni.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = n$.
F V b) Se $m = n$ e $\det A = 0$ allora **S** non ammette soluzioni.
F V c) Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sono due soluzioni di **S** allora $(x'_1 - x_1, \ldots, x'_n - x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.
F V d) Se $\rho(A) < \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

3) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Può accadere che **V** non ammetta alcun sottospazio vettoriale.
F V b) Se X è un sottoinsieme linearmente indipendente di **V** e Y è un sistema di generatori per **V** allora $|X| \leq |Y|$ (con $|X|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di X e la cardinalità di Y).
F V c) Se $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di **V** e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora esiste una ed una sola n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$.
F V d) Se **W** è un sottospazio vettoriale di **V** si ha che $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Non esistono matrici simmetriche e ortogonali.
F V b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ è una matrice triangolare e $a^1_1 = 0$ allora $\det A = 0$.
F V c) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante positivo.
F V d) Tutte le matrici reali quadrate invertibili hanno determinante non nullo.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se due matrici quadrate reali A e B sono simili, si ha che $\rho(A) = \rho(B)$.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari iniettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

F **V** c) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F **V** d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A + \mu B) = \lambda \det A + \mu \det B$.

6) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo che n sia un numero pari non inferiore a 10.

F **V** a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$.

F **V** b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (0, x_2, 0, x_4, \dots, x_{n-2}, 0, x_n)$.

F **V** c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot (1, 1, 1, \dots, 1)$.

F **V** d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.

F **V** b) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica non invertibile allora ha un autovalore nullo.

F **V** c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F **V** d) Se T è l'applicazione lineare nulla allora 0 è l'unico autovalore di T.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

F **V** b) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F **V** c) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^\perp\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** d) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = -\tilde{\mathbf{e}}_1$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se $\rho(A) = n$ allora T ammette una base spettrale.

F **V** b) Se A è ortogonale, n è dispari e $\det A = 1$ allora 1 è un autovalore di A.

F **V** c) Se A è simmetrica allora ammette n autovalori distinti.

F **V** d) Se A è invertibile allora A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è simmetrica allora ammette n autovalori distinti.
F V b) Se A è ortogonale, n è dispari e $\det A = 1$ allora 1 è un autovalore di A.
F V c) Se A è invertibile allora A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.
F V d) Se $\rho(A) = n$ allora T ammette una base spettrale.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.
F V b) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.
F V c) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = -\tilde{\mathbf{e}}_1$.
F V d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se X è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|X| \leq |Y|$ (con $|X|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di X e la cardinalità di Y).
F V b) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sottospazio vettoriale.
F V c) Se $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.
F V d) Se $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora esiste una ed una sola n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette soluzione.
F V b) Se A è una matrice simmetrica allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.
F V c) Se il rango di C è uguale a n allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.
F V d) Se il rango di C è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F **V** b) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica non invertibile allora ha un autovalore nullo.

F **V** c) Se T è l'applicazione lineare nulla allora 0 è l'unico autovalore di T.

F **V** d) Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.

6) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di polinomi.

F **V** b) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alla usuale operazione di somma di polinomi.

F **V** c) Insieme delle permutazioni su n oggetti rispetto alla usuale composizione di applicazioni.

F **V** d) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ è una matrice triangolare e $a^1_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

F **V** b) Non esistono matrici simmetriche e ortogonali.

F **V** c) Tutte le matrici reali quadrate invertibili hanno determinante non nullo.

F **V** d) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante positivo.

8) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo $n \geq 10$.

F **V** a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, x_1)$.

F **V** b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_5, 0, \dots, 0, 0, 0)$.

F **V** c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (nx_1, nx_2, \dots, nx_{n-2}, nx_{n-1}, nx_n)$.

F **V** d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Esistono infinite trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^8[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

F **V** b) Se B è una matrice ortogonale $n \times n$ allora il suo rango è n.

F **V** c) Tutti gli spazi vettoriali reali hanno dimensione finita.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = T(\mathbf{U}) \cap T(\mathbf{W})$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo che n sia un numero pari non inferiore a 10.

F V a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot (1, 1, 1, \dots, 1)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (0, x_2, 0, x_4, \dots, x_{n-2}, 0, x_n)$.

2) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) Insieme delle matrici 5×5 reali invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto di matrici.

F V b) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F V c) $M_7(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F V d) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri complessi.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni di **S** allora $(x'_1 - x_1, \dots, x'_n - x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F V b) Se $\rho(A) < \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F V c) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = n$.

F V d) Se $m = n$ e $\det A = 0$ allora **S** non ammette soluzioni.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(1, 1, 1)$.

F V b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1 e sono a due a due ortogonali.

F V c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora il prodotto scalare fra $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è uguale a 0.

F V d) Esistono rette r e s di $\mathbb{R}^3$ che non sono fra loro né parallele né incidenti.

5) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) **V** ammette una e una sola base.

F V b) $\mathbf{V} + \mathbf{V} = \mathbf{V}$.

F V c) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** si ha che $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$.

F V d) Qualunque insieme di n vettori che sia un sistema di generatori per **V** è una base di **V**.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è diagonale e invertibile anche la sua inversa è diagonale.

F **V** b) Se A ha traccia nulla allora A^2 ha traccia nulla.

F **V** c) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{4024}\right) = 0$.

F **V** d) Se A è diagonale anche la sua trasposta è diagonale.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare identica.

F **V** b) Può accadere che T ammetta un numero infinito di autovalori distinti.

F **V** c) Se n è pari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** d) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente inferiore a n.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F **V** b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A + \mu B) = \lambda \det A + \mu \det B$.

F **V** c) Se due matrici quadrate reali A e B sono simili, si ha che $\rho(A) = \rho(B)$.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari iniettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F **V** b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è uguale a n.

F **V** c) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** d) T ammette almeno una base spettrale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo $n \geq 10$.

F V a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (nx_1, nx_2, \dots, nx_{n-2}, nx_{n-1}, nx_n)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, x_1)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_5, 0, \dots, 0, 0, 0)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n)$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Tutti gli spazi vettoriali reali hanno dimensione finita.

F V b) Esistono infinite trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^8[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

F V c) Se B è una matrice ortogonale $n \times n$ allora il suo rango è n.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = T(\mathbf{U}) \cap T(\mathbf{W})$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è uguale a n.

F V b) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) T ammette almeno una base spettrale.

F V d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1 e sono a due a due ortogonali.

F V b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora il prodotto scalare fra $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è uguale a 0.

F V c) Esistono rette r e s di $\mathbb{R}^3$ che non sono fra loro né parallele né incidenti.

F V d) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(1, 1, 1)$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di C è uguale a n allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F V b) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette soluzione.

F V c) Se A è una matrice simmetrica allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F V d) Se il rango di C è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Può accadere che T ammetta un numero infinito di autovalori distinti.

F V b) Se n è pari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente inferiore a n.

F V d) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare identica.

7) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alla usuale operazione di somma di polinomi.

F V b) Insieme delle permutazioni su n oggetti rispetto alla usuale composizione di applicazioni.

F V c) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma.

F V d) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di polinomi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Non esistono matrici simmetriche e ortogonali.

F V b) Tutte le matrici reali quadrate invertibili hanno determinante non nullo.

F V c) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante positivo.

F V d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ è una matrice triangolare e $a^1_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sottospazio vettoriale.

F V b) Se $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F V c) Se $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora esiste una ed una sola n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$.

F V d) Se X è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|X| \leq |Y|$ (con $|X|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di X e la cardinalità di Y).

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

F V a) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{4024}\right) = 0$.

F V b) Se A ha traccia nulla allora A^2 ha traccia nulla.

F V c) Se A è diagonale anche la sua trasposta è diagonale.

F V d) Se A è diagonale e invertibile anche la sua inversa è diagonale.

2) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $M_7(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F V b) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F V c) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri complessi.

F V d) Insieme delle matrici 5×5 reali invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto di matrici.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$.

F V b) $\mathbf{V} + \mathbf{V} = \mathbf{V}$.

F V c) Qualunque insieme di n vettori che sia un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F V d) $\mathbf{V}$ ammette una e una sola base.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F V b) Se T è l'applicazione lineare nulla allora 0 è l'unico autovalore di T.

F V c) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica non invertibile allora ha un autovalore nullo.

F V d) Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se due matrici quadrate reali A e B sono simili, si ha che $\rho(A) = \rho(B)$.

F V b) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari iniettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

F V d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A + \mu B) = \lambda \det A + \mu \det B$.

6) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo che n sia un numero pari non inferiore a 10.

F **V** a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$.

F **V** b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot (1, 1, 1, \dots, 1)$.

F **V** c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (0, x_2, 0, x_4, \dots, x_{n-2}, 0, x_n)$.

F **V** d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se A è simmetrica allora ammette n autovalori distinti.

F **V** b) Se A è invertibile allora A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** c) Se A è ortogonale, n è dispari e $\det A = 1$ allora 1 è un autovalore di A.

F **V** d) Se $\rho(A) = n$ allora T ammette una base spettrale.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** b) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = -\tilde{\mathbf{e}}_1$.

F **V** c) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F **V** d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Supponiamo che $\mathbf{S}$ ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = n$.

F **V** b) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $(x'_1 - x_1, \dots, x'_n - x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F **V** c) Se $m = n$ e $\det A = 0$ allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

F **V** d) Se $\rho(A) < \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Tutti gli spazi vettoriali reali hanno dimensione finita.

F V b) Esistono infinite trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^8[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

F V c) Se B è una matrice ortogonale $n \times n$ allora il suo rango è n.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = T(\mathbf{U}) \cap T(\mathbf{W})$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di C è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F V b) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora ammette soluzione.

F V c) Se A è una matrice simmetrica allora **S** ammette soluzione.

F V d) Se il rango di C è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F V b) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica non invertibile allora ha un autovalore nullo.

F V c) Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.

F V d) Se T è l'applicazione lineare nulla allora 0 è l'unico autovalore di T.

4) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri complessi.

F V b) $M_7(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F V c) Insieme delle matrici 5×5 reali invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto di matrici.

F V d) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è simmetrica allora ammette n autovalori distinti.

F V b) Se A è ortogonale, n è dispari e $\det A = 1$ allora 1 è un autovalore di A.

F V c) Se $\rho(A) = n$ allora T ammette una base spettrale.

F V d) Se A è invertibile allora A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** b) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F **V** c) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

F **V** d) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = -\tilde{\mathbf{e}}_1$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è diagonale anche la sua trasposta è diagonale.

F **V** b) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{4024}\right) = 0$.

F **V** c) Se A è diagonale e invertibile anche la sua inversa è diagonale.

F **V** d) Se A ha traccia nulla allora A^2 ha traccia nulla.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Qualunque insieme di n vettori che sia un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$.

F **V** c) $\mathbf{V}$ ammette una e una sola base.

F **V** d) $\mathbf{V} + \mathbf{V} = \mathbf{V}$.

9) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo $n \geq 10$.

F **V** a) $T : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (nx_1, nx_2, \ldots, nx_{n-2}, nx_{n-1}, nx_n)$.

F **V** b) $T : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_1)$.

F **V** c) $T : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_5, 0, \ldots, 0, 0, 0)$.

F **V** d) $T : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \ldots, x_{n-1} + x_n, x_n)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ è una matrice triangolare e $a^1_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

F V b) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante positivo.

F V c) Tutte le matrici reali quadrate invertibili hanno determinante non nullo.

F V d) Non esistono matrici simmetriche e ortogonali.

2) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di polinomi.

F V b) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma.

F V c) Insieme delle permutazioni su n oggetti rispetto alla usuale composizione di applicazioni.

F V d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alla usuale operazione di somma di polinomi.

3) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo che n sia un numero pari non inferiore a 10.

F V a) $T : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot (1, 1, 1, \ldots, 1)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (0, x_2, 0, x_4, \ldots, x_{n-2}, 0, x_n)$.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se X è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|X| \leq |Y|$ (con $|X|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di X e la cardinalità di Y).

F V b) Se $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora esiste una ed una sola n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$.

F V c) Se $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F V d) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sottospazio vettoriale.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F V c) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è uguale a n.

F V d) T ammette almeno una base spettrale.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se n è pari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** b) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare identica.

F **V** c) Può accadere che T ammetta un numero infinito di autovalori distinti.

F **V** d) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente inferiore a n.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni di **S** allora $(x'_1 - x_1, \dots, x'_n - x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F **V** b) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = n$.

F **V** c) Se $\rho(A) < \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F **V** d) Se $m = n$ e $\det A = 0$ allora **S** non ammette soluzioni.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora il prodotto scalare fra $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è uguale a 0.

F **V** b) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(1, 1, 1)$.

F **V** c) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1 e sono a due a due ortogonali.

F **V** d) Esistono rette r e s di $\mathbb{R}^3$ che non sono fra loro né parallele né incidenti.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F **V** b) Se due matrici quadrate reali A e B sono simili, si ha che $\rho(A) = \rho(B)$.

F **V** c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A + \mu B) = \lambda \det A + \mu \det B$.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari iniettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare identica.

F V b) Può accadere che T ammetta un numero infinito di autovalori distinti.

F V c) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente inferiore a n.

F V d) Se n è pari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

2) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo $n \geq 10$.

F V a) $T : (x_1, x_2, \dots , x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_5, 0, \dots , 0, 0, 0)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \dots , x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (nx_1, nx_2, \dots , nx_{n-2}, nx_{n-1}, nx_n)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \dots , x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \dots , x_{n-1}, x_n, x_1)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \dots , x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots , x_{n-1} + x_n, x_n)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se B è una matrice ortogonale $n \times n$ allora il suo rango è n.

F V b) Tutti gli spazi vettoriali reali hanno dimensione finita.

F V c) Esistono infinite trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^8[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = T(\mathbf{U}) \cap T(\mathbf{W})$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(1, 1, 1)$.

F V b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se i suoi vettori hanno norma uguale a 1 e sono a due a due ortogonali.

F V c) Esistono rette r e s di $\mathbb{R}^3$ che non sono fra loro né parallele né incidenti.

F V d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora il prodotto scalare fra $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è uguale a 0.

5) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) Insieme delle matrici 5×5 reali invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto di matrici.

F V b) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri complessi.

F V c) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F V d) $M_7(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è diagonale e invertibile anche la sua inversa è diagonale.

F **V** b) Se A è diagonale anche la sua trasposta è diagonale.

F **V** c) Se A ha traccia nulla allora A^2 ha traccia nulla.

F **V** d) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{4024}\right) = 0$.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F **V** a) $\mathbf{V}$ ammette una e una sola base.

F **V** b) Qualunque insieme di n vettori che sia un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F **V** c) $\mathbf{V} + \mathbf{V} = \mathbf{V}$.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F **V** b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è uguale a n.

F **V** c) T ammette almeno una base spettrale.

F **V** d) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se A è una matrice simmetrica allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F **V** b) Se il rango di C è uguale a n allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F **V** c) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette soluzione.

F **V** d) Se il rango di C è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T è l'applicazione lineare nulla allora 0 è l'unico autovalore di T.

F V b) Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.

F V c) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica non invertibile allora ha un autovalore nullo.

F V d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Tutte le matrici reali quadrate invertibili hanno determinante non nullo.

F V b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ è una matrice triangolare e $a^1_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

F V c) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante positivo.

F V d) Non esistono matrici simmetriche e ortogonali.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F V b) Se X è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|X| \leq |Y|$ (con $|X|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di X e la cardinalità di Y).

F V c) Se $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora esiste una ed una sola n-upla $(x_1, \dots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$.

F V d) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sottospazio vettoriale.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è invertibile allora A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se $\rho(A) = n$ allora T ammette una base spettrale.

F V c) Se A è ortogonale, n è dispari e $\det A = 1$ allora 1 è un autovalore di A.

F V d) Se A è simmetrica allora ammette n autovalori distinti.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Dati tre spazi vettoriali reali $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ di dimensioni finite, se $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U}$ non è isomorfo a $\mathbf{W}$.

F V b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari iniettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

F V c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A + \mu B) = \lambda \det A + \mu \det B$.

F V d) Se due matrici quadrate reali A e B sono simili, si ha che $\rho(A) = \rho(B)$.

6) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a se stesso sono lineari, assumendo che n sia un numero pari non inferiore a 10.

F V a) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (\sum_{i=1}^{n} x_i) \cdot (1, 1, 1, \dots, 1)$.

F V b) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (0, x_2, 0, x_4, \dots, x_{n-2}, 0, x_n)$.

F V c) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1)$.

F V d) $T : (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo ad un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $(x'_1 - x_1, \dots, x'_n - x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V b) Se $m = n$ e $\det A = 0$ allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

F V c) Se $\rho(A) < \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F V d) Supponiamo che $\mathbf{S}$ ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = n$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = -\tilde{\mathbf{e}}_1$.

F V b) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

F V c) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V d) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

9) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) Insieme delle permutazioni su n oggetti rispetto alla usuale composizione di applicazioni.

F V b) $\mathbb{R}^5[x]$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di polinomi.

F V c) $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di somma.

F V d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alla usuale operazione di somma di polinomi.