Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F **V** b) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F **V** c) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F **V** d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'operazione di divisione di polinomi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Tutte le matrici simmetriche sono ortogonali.

F **V** b) Se A è una matrice ortogonale anche la matrice A^2 è ortogonale.

F **V** c) Una matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

F **V** d) La somma di due matrici reali simmetriche dello stesso ordine è una matrice reale simmetrica.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Due sistemi di generatori qualunque di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

F **V** b) Se B è una base di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|B| \geq |Y|$ (con $|B|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di B e la cardinalità di Y).

F **V** c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{U} + \dim^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{V}$.

F **V** d) Due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ ammettono sempre almeno un vettore in comune.

4) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$.

F **V** b) $T : (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$.

F **V** c) $T : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 0, 0)$.

F **V** d) $T : (x, y, z) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^3[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

F **V** c) Se B è una matrice invertibile $n \times n$ allora il suo rango è n.

F **V** d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora T è iniettiva se e solo se $\dim \mathrm{Im}T = n$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora non può ammettere soluzione.

F V b) Se il rango di A è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F V c) Se A è una matrice quadrata invertibile allora **S** ammette una e una sola soluzione.

F V d) Se il rango di A è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T è l'applicazione lineare identica allora 0 è l'unico autovalore di T.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F V c) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica invertibile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

F V d) Se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T$.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche la matrice $-A$.

F V b) A^3 è la matrice associata a T^3 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V c) Se $\det A = 0$ allora T non è suriettiva.

F V d) Se il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ allora T ammette una base spettrale.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) $\tilde{\mathbf{e}}_3 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) Se **U** è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$, allora ${}^\perp\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$.

F V c) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ è la matrice identica 3×3.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se $\rho(A) = \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F **V** b) Se $m = n$ e $\det A < 0$ allora **S** non ammette soluzioni.

F **V** c) Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sono due soluzioni di **S** allora $(x'_1 + x_1, \ldots, x'_n + x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F **V** d) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = 0$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Se r e s sono rette di $\mathbb{R}^3$ sia parallele che incidenti allora coincidono.

F **V** b) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(0, 0, 0)$.

F **V** c) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

F **V** d) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se contiene i vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) T è l'endomorfismo nullo (cioè l'endomorfismo che manda ogni vettore nel vettore nullo) allora ammette almeno una base spettrale.

F **V** b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora $A = B$.

F **V** c) Se A è ortogonale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a n.

4) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y) \mapsto (xy, xy)$.

F **V** b) $T : (x, y) \mapsto (x, y)$.

F **V** c) $T : (x, y) \mapsto (1, 1)$.

F **V** d) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F **V** b) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

F **V** c) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{1006}\right) = 0$.

F **V** d) Se A ha traccia nulla allora $-A$ ha traccia nulla.

6) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) Insieme delle matrici 3×3 reali simmetriche, rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F **V** b) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri complessi.

F **V** c) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.

F **V** d) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri razionali.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari suriettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

F **V** c) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono fra loro isomorfi.

F **V** d) Se due matrici quadrate reali A e B sono fra loro simili, allora anche A^2 e B^2 sono fra loro simili.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 10 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) $\mathbf{V}$ ammette esattamente 10 basi.

F **V** b) Qualunque insieme di 10 vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F **V** c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune il solo vettore nullo si ha che $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

F **V** d) Se $\mathbf{0}$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ contenente il solo vettore nullo, $\mathbf{V} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{V}$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente superiore a n.

F **V** b) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica 1 allora T è la trasformazione lineare identica.

F **V** c) Se n è dispari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** d) Può accadere che T ammetta un solo autovalore.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) La somma di due matrici reali simmetriche dello stesso ordine è una matrice reale simmetrica.

F **V** b) Tutte le matrici simmetriche sono ortogonali.

F **V** c) Se A è una matrice ortogonale anche la matrice A^2 è ortogonale.

F **V** d) Una matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora T è iniettiva se e solo se $\dim \mathrm{Im} T = n$.

F **V** b) Se B è una matrice invertibile $n \times n$ allora il suo rango è n.

F **V** c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

F **V** d) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^3[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F **V** b) Se A è una matrice quadrata invertibile allora $\mathbf{S}$ ammette una e una sola soluzione.

F **V** c) Se il rango di A è uguale a n allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F **V** d) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora non può ammettere soluzione.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Può accadere che T ammetta un solo autovalore.

F **V** b) Se n è dispari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** c) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente superiore a n.

F **V** d) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica 1 allora T è la trasformazione lineare identica.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ ammettono sempre almeno un vettore in comune.

F **V** b) Due sistemi di generatori qualunque di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

F **V** c) Se B è una base di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|B| \geq |Y|$ (con $|B|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di B e la cardinalità di Y).

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{U} + \dim^{\perp} \mathbf{U} = \dim \mathbf{V}$.

6) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 0, 0)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a n.

F V b) Se A è ortogonale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) T è l'endomorfismo nullo (cioè l'endomorfismo che manda ogni vettore nel vettore nullo) allora ammette almeno una base spettrale.

F V d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora $A = B$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se contiene i vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

F V b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

F V c) Se r e s sono rette di $\mathbb{R}^3$ sia parallele che incidenti allora coincidono.

F V d) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(0, 0, 0)$.

9) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'operazione di divisione di polinomi.

F V b) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F V c) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F V d) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$, allora $^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$.

F V b) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V c) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ è la matrice identica 3×3.

F V d) $\tilde{\mathbf{e}}_3 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se due matrici quadrate reali A e B sono fra loro simili, allora anche A^2 e B^2 sono fra loro simili.

F V b) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono fra loro isomorfi.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari suriettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

F V d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

3) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri razionali.

F V b) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri complessi.

F V c) Insieme delle matrici 3×3 reali simmetriche, rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F V d) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Supponiamo che $\mathbf{S}$ ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = 0$.

F V b) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $(x'_1 + x_1, \dots, x'_n + x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V c) Se $m = n$ e $\det A < 0$ allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

F V d) Se $\rho(A) = \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) A^3 è la matrice associata a T^3 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** b) Se $\det A = 0$ allora T non è suriettiva.

F **V** c) Se il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ allora T ammette una base spettrale.

F **V** d) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche la matrice $-A$.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F **V** b) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica invertibile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

F **V** c) Se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T$.

F **V** d) Se T è l'applicazione lineare identica allora 0 è l'unico autovalore di T.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 10 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Se $\mathbf{0}$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ contenente il solo vettore nullo, $\mathbf{V} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{V}$.

F **V** b) Qualunque insieme di 10 vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F **V** c) $\mathbf{V}$ ammette esattamente 10 basi.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune il solo vettore nullo si ha che $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A ha traccia nulla allora $-A$ ha traccia nulla.

F **V** b) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

F **V** c) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F **V** d) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{1006}\right) = 0$.

9) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

F **V** b) $T : (x, y) \mapsto (1, 1)$.

F **V** c) $T : (x, y) \mapsto (x, y)$.

F **V** d) $T : (x, y) \mapsto (xy, xy)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A ha traccia nulla allora $-A$ ha traccia nulla.
F V b) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.
F V c) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.
F V d) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{1006}\right) = 0$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 10 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{0}$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ contenente il solo vettore nullo, $\mathbf{V} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{V}$.
F V b) $\mathbf{V}$ ammette esattamente 10 basi.
F V c) Qualunque insieme di 10 vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.
F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune il solo vettore nullo si ha che $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A^3 è la matrice associata a T^3 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.
F V b) Se il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ allora T ammette una base spettrale.
F V c) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche la matrice $-A$.
F V d) Se $\det A = 0$ allora T non è suriettiva.

4) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$.
F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$.
F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1)$.
F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 0, 0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.
F V b) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^3[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
F V c) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora T è iniettiva se e solo se $\dim \mathrm{Im} T = n$.
F V d) Se B è una matrice invertibile $n \times n$ allora il suo rango è n.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se il rango di A è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F **V** b) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora non può ammettere soluzione.

F **V** c) Se il rango di A è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

F **V** d) Se A è una matrice quadrata invertibile allora **S** ammette una e una sola soluzione.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F **V** b) Se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T$.

F **V** c) Se T è l'applicazione lineare identica allora 0 è l'unico autovalore di T.

F **V** d) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica invertibile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$.

F **V** b) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ è la matrice identica 3×3.

F **V** c) $\tilde{\mathbf{e}}_3 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** d) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

9) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri razionali.

F **V** b) Insieme delle matrici 3×3 reali simmetriche, rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F **V** c) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri complessi.

F **V** d) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se n è dispari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** b) Può accadere che T ammetta un solo autovalore.

F **V** c) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica 1 allora T è la trasformazione lineare identica.

F **V** d) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente superiore a n.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se $m = n$ e $\det A < 0$ allora **S** non ammette soluzioni.

F **V** b) Se $\rho(A) = \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F **V** c) Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sono due soluzioni di **S** allora $(x'_1 + x_1, \ldots, x'_n + x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F **V** d) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = 0$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se A è una matrice ortogonale anche la matrice A^2 è ortogonale.

F **V** b) Una matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

F **V** c) Tutte le matrici simmetriche sono ortogonali.

F **V** d) La somma di due matrici reali simmetriche dello stesso ordine è una matrice reale simmetrica.

4) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F **V** b) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F **V** c) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F **V** d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'operazione di divisione di polinomi.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è ortogonale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a n.

F V c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora $A = B$.

F V d) T è l'endomorfismo nullo (cioè l'endomorfismo che manda ogni vettore nel vettore nullo) allora ammette almeno una base spettrale.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

F V b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se contiene i vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

F V c) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(0, 0, 0)$.

F V d) Se r e s sono rette di $\mathbb{R}^3$ sia parallele che incidenti allora coincidono.

7) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (x, y)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (xy, xy)$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (1, 1)$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se B è una base di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|B| \geq |Y|$ (con $|B|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di B e la cardinalità di Y).

F V b) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{U} + \dim^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{V}$.

F V c) Due sistemi di generatori qualunque di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

F V d) Due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ ammettono sempre almeno un vettore in comune.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari suriettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

F V b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

F V c) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono fra loro isomorfi.

F V d) Se due matrici quadrate reali A e B sono fra loro simili, allora anche A^2 e B^2 sono fra loro simili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.
F V b) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{1006}\right) = 0$.
F V c) Se A ha traccia nulla allora $-A$ ha traccia nulla.
F V d) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 10 sul campo dei numeri reali.

F V a) Qualunque insieme di 10 vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.
F V b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune il solo vettore nullo si ha che $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.
F V c) Se $\mathbf{0}$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ contenente il solo vettore nullo, $\mathbf{V} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{V}$.
F V d) $\mathbf{V}$ ammette esattamente 10 basi.

3) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$.
F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 0, 0)$.
F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$.
F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.
F V b) Se B è una matrice invertibile $n \times n$ allora il suo rango è n.
F V c) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^3[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
F V d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora T è iniettiva se e solo se $\dim \mathrm{Im} T = n$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se contiene i vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
F V b) Se r e s sono rette di $\mathbb{R}^3$ sia parallele che incidenti allora coincidono.
F V c) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(0, 0, 0)$.
F V d) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

6) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri complessi.

F **V** b) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.

F **V** c) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri razionali.

F **V** d) Insieme delle matrici 3×3 reali simmetriche, rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se il rango di A è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F **V** b) Se A è una matrice quadrata invertibile allora **S** ammette una e una sola soluzione.

F **V** c) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora non può ammettere soluzione.

F **V** d) Se il rango di A è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Può accadere che T ammetta un solo autovalore.

F **V** b) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente superiore a n.

F **V** c) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica 1 allora T è la trasformazione lineare identica.

F **V** d) Se n è dispari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a n.

F **V** b) T è l'endomorfismo nullo (cioè l'endomorfismo che manda ogni vettore nel vettore nullo) allora ammette almeno una base spettrale.

F **V** c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora $A = B$.

F **V** d) Se A è ortogonale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

F **V** b) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono fra loro isomorfi.

F **V** c) Se due matrici quadrate reali A e B sono fra loro simili, allora anche A^2 e B^2 sono fra loro simili.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari suriettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se $\det A = 0$ allora T non è suriettiva.

F **V** b) A^3 è la matrice associata a T^3 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** c) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche la matrice $-A$.

F **V** d) Se il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ allora T ammette una base spettrale.

3) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F **V** b) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F **V** c) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'operazione di divisione di polinomi.

F **V** d) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$.

F **V** c) $\tilde{\mathbf{e}}_3 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ è la matrice identica 3×3.

5) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Due sistemi di generatori qualunque di **V** hanno la stessa cardinalità.

F **V** b) Se B è una base di **V** e Y è un sistema di generatori per **V** allora $|B| \geq |Y|$ (con $|B|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di B e la cardinalità di Y).

F **V** c) Due sottospazi vettoriali di **V** ammettono sempre almeno un vettore in comune.

F **V** d) Se **U** è un sottospazio vettoriale di **V** si ha che $\dim \mathbf{U} + \dim^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{V}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Tutte le matrici simmetriche sono ortogonali.

F **V** b) Se A è una matrice ortogonale anche la matrice A^2 è ortogonale.

F **V** c) La somma di due matrici reali simmetriche dello stesso ordine è una matrice reale simmetrica.

F **V** d) Una matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se $\rho(A) = \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F **V** b) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni di **S** allora $(x'_1 + x_1, \dots, x'_n + x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F **V** c) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = 0$.

F **V** d) Se $m = n$ e $\det A < 0$ allora **S** non ammette soluzioni.

8) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y) \mapsto (xy, xy)$.

F **V** b) $T : (x, y) \mapsto (1, 1)$.

F **V** c) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

F **V** d) $T : (x, y) \mapsto (x, y)$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica invertibile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

F **V** b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F **V** c) Se T è l'applicazione lineare identica allora 0 è l'unico autovalore di T.

F **V** d) Se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se B è una base di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|B| \geq |Y|$ (con $|B|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di B e la cardinalità di Y).

F V b) Due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ ammettono sempre almeno un vettore in comune.

F V c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{U} + \dim^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{V}$.

F V d) Due sistemi di generatori qualunque di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A^3 è la matrice associata a T^3 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V b) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche la matrice $-A$.

F V c) Se $\det A = 0$ allora T non è suriettiva.

F V d) Se il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ allora T ammette una base spettrale.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$.

F V b) $\tilde{\mathbf{e}}_3 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V c) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ è la matrice identica 3×3.

4) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 0, 0)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora T è iniettiva se e solo se $\dim \mathrm{Im}T = n$.

F V b) Se B è una matrice invertibile $n \times n$ allora il suo rango è n.

F V c) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^3[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

F V d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di A è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

F V b) Se A è una matrice quadrata invertibile allora **S** ammette una e una sola soluzione.

F V c) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora non può ammettere soluzione.

F V d) Se il rango di A è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F V b) Se T è l'applicazione lineare identica allora 0 è l'unico autovalore di T.

F V c) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica invertibile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

F V d) Se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T$.

8) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F V b) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'operazione di divisione di polinomi.

F V c) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F V d) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se A è una matrice ortogonale anche la matrice A^2 è ortogonale.

F V b) La somma di due matrici reali simmetriche dello stesso ordine è una matrice reale simmetrica.

F V c) Una matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

F V d) Tutte le matrici simmetriche sono ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è ortogonale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora $A = B$.

F V c) T è l'endomorfismo nullo (cioè l'endomorfismo che manda ogni vettore nel vettore nullo) allora ammette almeno una base spettrale.

F V d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a n.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se n è dispari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica 1 allora T è la trasformazione lineare identica.

F V c) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente superiore a n.

F V d) Può accadere che T ammetta un solo autovalore.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{1006}\right) = 0$.

F V b) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F V c) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

F V d) Se A ha traccia nulla allora $-A$ ha traccia nulla.

4) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.

F V b) Insieme delle matrici 3×3 reali simmetriche, rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F V c) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri complessi.

F V d) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri razionali.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 10 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune il solo vettore nullo si ha che $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

F V b) $\mathbf{V}$ ammette esattamente 10 basi.

F V c) Qualunque insieme di 10 vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F V d) Se $\mathbf{0}$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ contenente il solo vettore nullo, $\mathbf{V} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{V}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se $m = n$ e $\det A < 0$ allora **S** non ammette soluzioni.

F **V** b) Se $\rho(A) = \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F **V** c) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni di **S** allora $(x'_1 + x_1, \dots, x'_n + x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F **V** d) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = 0$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se **U** e **V** sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari suriettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora **U** e **V** sono isomorfi.

F **V** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

F **V** c) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono fra loro isomorfi.

F **V** d) Se due matrici quadrate reali A e B sono fra loro simili, allora anche A^2 e B^2 sono fra loro simili.

8) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y) \mapsto (x, y)$.

F **V** b) $T : (x, y) \mapsto (xy, xy)$.

F **V** c) $T : (x, y) \mapsto (1, 1)$.

F **V** d) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

F **V** b) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(0, 0, 0)$.

F **V** c) Se r e s sono rette di $\mathbb{R}^3$ sia parallele che incidenti allora coincidono.

F **V** d) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se contiene i vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

7 giugno 2012 N. di Matricola: 01111

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 0, 0)$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di A è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

F V b) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora non può ammettere soluzione.

F V c) Se il rango di A è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F V d) Se A è una matrice quadrata invertibile allora **S** ammette una e una sola soluzione.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Può accadere che T ammetta un solo autovalore.

F V b) Se n è dispari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica 1 allora T è la trasformazione lineare identica.

F V d) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente superiore a n.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se **V** è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora T è iniettiva se e solo se $\dim \mathrm{Im} T = n$.

F V b) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^3[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

F V c) Se **U** è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale **V** e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U})$ è un sottospazio vettoriale di **V**.

F V d) Se B è una matrice invertibile $n \times n$ allora il suo rango è n.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a n.

F V b) Se A è ortogonale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora $A = B$.

F V d) T è l'endomorfismo nullo (cioè l'endomorfismo che manda ogni vettore nel vettore nullo) allora ammette almeno una base spettrale.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se contiene i vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

F V b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

F V c) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(0, 0, 0)$.

F V d) Se r e s sono rette di $\mathbb{R}^3$ sia parallele che incidenti allora coincidono.

7) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'operazione di divisione di polinomi.

F V b) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F V c) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F V d) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La somma di due matrici reali simmetriche dello stesso ordine è una matrice reale simmetrica.

F V b) Una matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

F V c) Se A è una matrice ortogonale anche la matrice A^2 è ortogonale.

F V d) Tutte le matrici simmetriche sono ortogonali.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ ammettono sempre almeno un vettore in comune.

F V b) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{U} + \dim^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{V}$.

F V c) Se B è una base di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|B| \geq |Y|$ (con $|B|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di B e la cardinalità di Y).

F V d) Due sistemi di generatori qualunque di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.
F V b) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{1006}\right) = 0$.
F V c) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.
F V d) Se A ha traccia nulla allora $-A$ ha traccia nulla.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $m = n$ e $\det A < 0$ allora **S** non ammette soluzioni.
F V b) Se $\rho(A) = \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.
F V c) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = 0$.
F V d) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni di **S** allora $(x'_1 + x_1, \dots, x'_n + x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.
F V b) Se T è l'applicazione lineare identica allora 0 è l'unico autovalore di T.
F V c) Se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T$.
F V d) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica invertibile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

4) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 10 sul campo dei numeri reali.

F V a) Qualunque insieme di 10 vettori linearmente indipendenti di **V** è una base di **V**.
F V b) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** che hanno in comune il solo vettore nullo si ha che $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.
F V c) **V** ammette esattamente 10 basi.
F V d) Se $\mathbf{0}$ è il sottospazio vettoriale di **V** contenente il solo vettore nullo, $\mathbf{V} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{V}$.

5) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri complessi.

F V b) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.

F V c) Insieme delle matrici 3×3 reali simmetriche, rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F V d) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri razionali.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A^3 è la matrice associata a T^3 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V b) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche la matrice $-A$.

F V c) Se il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ allora T ammette una base spettrale.

F V d) Se $\det A = 0$ allora T non è suriettiva.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari suriettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

F V b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

F V c) Se due matrici quadrate reali A e B sono fra loro simili, allora anche A^2 e B^2 sono fra loro simili.

F V d) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono fra loro isomorfi.

8) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (x, y)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (xy, xy)$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (1, 1)$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$.

F V b) $\tilde{\mathbf{e}}_3 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V c) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ è la matrice identica 3×3.

F V d) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 10 sul campo dei numeri reali.

F V a) $\mathbf{V}$ ammette esattamente 10 basi.

F V b) Se $\mathbf{0}$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ contenente il solo vettore nullo, $\mathbf{V} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{V}$.

F V c) Qualunque insieme di 10 vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune il solo vettore nullo si ha che $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

2) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 0, 0)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se B è una matrice invertibile $n \times n$ allora il suo rango è n.

F V b) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora T è iniettiva se e solo se $\dim \mathrm{Im} T = n$.

F V c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

F V d) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^3[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se A è una matrice quadrata invertibile allora $\mathbf{S}$ ammette una e una sola soluzione.

F V b) Se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F V c) Se il rango di A è uguale a n allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F V d) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora non può ammettere soluzione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F V b) Se A ha traccia nulla allora $-A$ ha traccia nulla.

F V c) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

F V d) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{1006}\right) = 0$.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se $\det A = 0$ allora T non è suriettiva.

F V b) A^3 è la matrice associata a T^3 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V c) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche la matrice $-A$.

F V d) Se il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ allora T ammette una base spettrale.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V b) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$.

F V c) $\tilde{\mathbf{e}}_3 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ è la matrice identica 3×3.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica invertibile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F V c) Se T è l'applicazione lineare identica allora 0 è l'unico autovalore di T.

F V d) Se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T$.

9) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) Insieme delle matrici 3×3 reali simmetriche, rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F V b) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri razionali.

F V c) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri complessi.

F V d) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a n.

F **V** b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora $A = B$.

F **V** c) T è l'endomorfismo nullo (cioè l'endomorfismo che manda ogni vettore nel vettore nullo) allora ammette almeno una base spettrale.

F **V** d) Se A è ortogonale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Può accadere che T ammetta un solo autovalore.

F **V** b) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica 1 allora T è la trasformazione lineare identica.

F **V** c) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente superiore a n.

F **V** d) Se n è dispari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Una matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

F **V** b) La somma di due matrici reali simmetriche dello stesso ordine è una matrice reale simmetrica.

F **V** c) Se A è una matrice ortogonale anche la matrice A^2 è ortogonale.

F **V** d) Tutte le matrici simmetriche sono ortogonali.

4) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F **V** b) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'operazione di divisione di polinomi.

F **V** c) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F **V** d) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

F **V** b) $T : (x, y) \mapsto (1, 1)$.

F **V** c) $T : (x, y) \mapsto (x, y)$.

F **V** d) $T : (x, y) \mapsto (xy, xy)$.

6) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Se **U** è un sottospazio vettoriale di **V** si ha che $\dim \mathbf{U} + \dim^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{V}$.

F **V** b) Due sottospazi vettoriali di **V** ammettono sempre almeno un vettore in comune.

F **V** c) Se B è una base di **V** e Y è un sistema di generatori per **V** allora $|B| \geq |Y|$ (con $|B|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di B e la cardinalità di Y).

F **V** d) Due sistemi di generatori qualunque di **V** hanno la stessa cardinalità.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se contiene i vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

F **V** b) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(0, 0, 0)$.

F **V** c) Se r e s sono rette di $\mathbb{R}^3$ sia parallele che incidenti allora coincidono.

F **V** d) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se due matrici quadrate reali A e B sono fra loro simili, allora anche A^2 e B^2 sono fra loro simili.

F **V** b) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono fra loro isomorfi.

F **V** c) Se **U** e **V** sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari suriettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora **U** e **V** sono isomorfi.

F **V** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = 0$.

F **V** b) Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sono due soluzioni di **S** allora $(x'_1 + x_1, \ldots, x'_n + x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F **V** c) Se $m = n$ e $\det A < 0$ allora **S** non ammette soluzioni.

F **V** d) Se $\rho(A) = \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$.
F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 0, 0)$.
F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1)$.
F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se n è dispari allora A è diagonalizzabile per similitudine.
F V b) Può accadere che T ammetta un solo autovalore.
F V c) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente superiore a n.
F V d) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica 1 allora T è la trasformazione lineare identica.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.
F V b) Se B è una matrice invertibile $n \times n$ allora il suo rango è n.
F V c) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora T è iniettiva se e solo se $\dim \mathrm{Im} T = n$.
F V d) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^3[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è ortogonale allora A è diagonalizzabile per similitudine.
F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a n.
F V c) T è l'endomorfismo nullo (cioè l'endomorfismo che manda ogni vettore nel vettore nullo) allora ammette almeno una base spettrale.
F V d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora $A = B$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.
F V b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se contiene i vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
F V c) Se r e s sono rette di $\mathbb{R}^3$ sia parallele che incidenti allora coincidono.
F V d) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(0, 0, 0)$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di A è uguale a n allora **S** ammette soluzione.

F V b) Se A è una matrice quadrata invertibile allora **S** ammette una e una sola soluzione.

F V c) Se il rango di A è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

F V d) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora non può ammettere soluzione.

7) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri razionali.

F V b) Insieme delle matrici 3×3 reali simmetriche, rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F V c) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.

F V d) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri complessi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se A ha traccia nulla allora $-A$ ha traccia nulla.

F V b) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F V c) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{1006}\right) = 0$.

F V d) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

9) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 10 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{0}$ è il sottospazio vettoriale di **V** contenente il solo vettore nullo, $\mathbf{V} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{V}$.

F V b) **V** ammette esattamente 10 basi.

F V c) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** che hanno in comune il solo vettore nullo si ha che $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

F V d) Qualunque insieme di 10 vettori linearmente indipendenti di **V** è una base di **V**.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'operazione di divisione di polinomi.

F V b) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F V c) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F V d) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = 0$.

F V b) Se $m = n$ e $\det A < 0$ allora **S** non ammette soluzioni.

F V c) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni di **S** allora $(x'_1 + x_1, \dots, x'_n + x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F V d) Se $\rho(A) = \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

3) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Due sottospazi vettoriali di **V** ammettono sempre almeno un vettore in comune.

F V b) Se B è una base di **V** e Y è un sistema di generatori per **V** allora $|B| \geq |Y|$ (con $|B|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di B e la cardinalità di Y).

F V c) Due sistemi di generatori qualunque di **V** hanno la stessa cardinalità.

F V d) Se **U** è un sottospazio vettoriale di **V** si ha che $\dim \mathbf{U} + \dim^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{V}$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La somma di due matrici reali simmetriche dello stesso ordine è una matrice reale simmetrica.

F V b) Se A è una matrice ortogonale anche la matrice A^2 è ortogonale.

F V c) Tutte le matrici simmetriche sono ortogonali.

F V d) Una matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se due matrici quadrate reali A e B sono fra loro simili, allora anche A^2 e B^2 sono fra loro simili.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari suriettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

F **V** c) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono fra loro isomorfi.

F **V** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

6) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

F **V** b) $T : (x, y) \mapsto (x, y)$.

F **V** c) $T : (x, y) \mapsto (1, 1)$.

F **V** d) $T : (x, y) \mapsto (xy, xy)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T$.

F **V** b) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica invertibile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

F **V** c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F **V** d) Se T è l'applicazione lineare identica allora 0 è l'unico autovalore di T.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ è la matrice identica 3×3.

F **V** b) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F **V** c) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$.

F **V** d) $\tilde{\mathbf{e}}_3 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ allora T ammette una base spettrale.

F **V** b) Se $\det A = 0$ allora T non è suriettiva.

F **V** c) A^3 è la matrice associata a T^3 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** d) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche la matrice $-A$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A^3 è la matrice associata a T^3 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V b) Se $\det A = 0$ allora T non è suriettiva.

F V c) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche la matrice $-A$.

F V d) Se il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ allora T ammette una base spettrale.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$.

F V b) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V c) $\tilde{\mathbf{e}}_3 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ è la matrice identica 3×3.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se B è una base di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|B| \geq |Y|$ (con $|B|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di B e la cardinalità di Y).

F V b) Due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ ammettono sempre almeno un vettore in comune.

F V c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{U} + \dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{V}$.

F V d) Due sistemi di generatori qualunque di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora non può ammettere soluzione.

F V b) Se A è una matrice quadrata invertibile allora $\mathbf{S}$ ammette una e una sola soluzione.

F V c) Se il rango di A è uguale a n allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F V d) Se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F V b) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica invertibile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

F V c) Se T è l'applicazione lineare identica allora 0 è l'unico autovalore di T.

F V d) Se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T$.

6) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F V b) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'operazione di divisione di polinomi.

F V c) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F V d) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se A è una matrice ortogonale anche la matrice A^2 è ortogonale.

F V b) La somma di due matrici reali simmetriche dello stesso ordine è una matrice reale simmetrica.

F V c) Una matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

F V d) Tutte le matrici simmetriche sono ortogonali.

8) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 0, 0)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^3[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

F V b) Se B è una matrice invertibile $n \times n$ allora il suo rango è n.

F V c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

F V d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora T è iniettiva se e solo se $\dim \mathrm{Im} T = n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (1, 1)$.
F V b) $T : (x, y) \mapsto (xy, xy)$.
F V c) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.
F V d) $T : (x, y) \mapsto (x, y)$.

2) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) Insieme delle matrici 3×3 reali simmetriche, rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.
F V b) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri razionali.
F V c) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.
F V d) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri complessi.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sono due soluzioni di **S** allora $(x'_1 + x_1, \ldots, x'_n + x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.
F V b) Se $\rho(A) = \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.
F V c) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = 0$.
F V d) Se $m = n$ e $\det A < 0$ allora **S** non ammette soluzioni.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(0, 0, 0)$.
F V b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se contiene i vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
F V c) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.
F V d) Se r e s sono rette di $\mathbb{R}^3$ sia parallele che incidenti allora coincidono.

5) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 10 sul campo dei numeri reali.

F V a) **V** ammette esattamente 10 basi.
F V b) Se **0** è il sottospazio vettoriale di **V** contenente il solo vettore nullo, $\mathbf{V} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{V}$.
F V c) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** che hanno in comune il solo vettore nullo si ha che $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.
F V d) Qualunque insieme di 10 vettori linearmente indipendenti di **V** è una base di **V**.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F **V** b) Se A ha traccia nulla allora $-A$ ha traccia nulla.

F **V** c) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{1006}\right) = 0$.

F **V** d) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica 1 allora T è la trasformazione lineare identica.

F **V** b) Può accadere che T ammetta un solo autovalore.

F **V** c) Se n è dispari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** d) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente superiore a n.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono fra loro isomorfi.

F **V** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

F **V** c) Se due matrici quadrate reali A e B sono fra loro simili, allora anche A^2 e B^2 sono fra loro simili.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari suriettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora $A = B$.

F **V** b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a n.

F **V** c) Se A è ortogonale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** d) T è l'endomorfismo nullo (cioè l'endomorfismo che manda ogni vettore nel vettore nullo) allora ammette almeno una base spettrale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$.
F **V** b) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$.
F **V** c) $T : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 0, 0)$.
F **V** d) $T : (x, y, z) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1)$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se **U** è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale **V** e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U})$ è un sottospazio vettoriale di **V**.
F **V** b) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^3[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
F **V** c) Se B è una matrice invertibile $n \times n$ allora il suo rango è n.
F **V** d) Se **V** è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora T è iniettiva se e solo se $\dim \mathrm{Im} T = n$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a n.
F **V** b) Se A è ortogonale allora A è diagonalizzabile per similitudine.
F **V** c) T è l'endomorfismo nullo (cioè l'endomorfismo che manda ogni vettore nel vettore nullo) allora ammette almeno una base spettrale.
F **V** d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora $A = B$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se contiene i vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
F **V** b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.
F **V** c) Se r e s sono rette di $\mathbb{R}^3$ sia parallele che incidenti allora coincidono.
F **V** d) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(0, 0, 0)$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se il rango di A è uguale a n allora **S** ammette soluzione.
F **V** b) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora non può ammettere soluzione.
F **V** c) Se A è una matrice quadrata invertibile allora **S** ammette una e una sola soluzione.
F **V** d) Se il rango di A è uguale a m allora **S** ammette soluzione.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Può accadere che T ammetta un solo autovalore.

F **V** b) Se n è dispari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** c) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente superiore a n.

F **V** d) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica 1 allora T è la trasformazione lineare identica.

7) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'operazione di divisione di polinomi.

F **V** b) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F **V** c) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F **V** d) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) La somma di due matrici reali simmetriche dello stesso ordine è una matrice reale simmetrica.

F **V** b) Una matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

F **V** c) Tutte le matrici simmetriche sono ortogonali.

F **V** d) Se A è una matrice ortogonale anche la matrice A^2 è ortogonale.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ ammettono sempre almeno un vettore in comune.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{U} + \dim^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{V}$.

F **V** c) Due sistemi di generatori qualunque di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

F **V** d) Se B è una base di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|B| \geq |Y|$ (con $|B|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di B e la cardinalità di Y).

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F V a) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{1006}\right) = 0$.

F V b) Se A ha traccia nulla allora $-A$ ha traccia nulla.

F V c) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

F V d) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

2) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.

F V b) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri razionali.

F V c) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri complessi.

F V d) Insieme delle matrici 3×3 reali simmetriche, rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 10 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune il solo vettore nullo si ha che $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

F V b) Se $\mathbf{0}$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ contenente il solo vettore nullo, $\mathbf{V} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{V}$.

F V c) Qualunque insieme di 10 vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F V d) $\mathbf{V}$ ammette esattamente 10 basi.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F V b) Se T è l'applicazione lineare identica allora 0 è l'unico autovalore di T.

F V c) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica invertibile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

F V d) Se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se due matrici quadrate reali A e B sono fra loro simili, allora anche A^2 e B^2 sono fra loro simili.

F V b) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono fra loro isomorfi.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari suriettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

F V d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

6) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (1, 1)$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (x, y)$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (xy, xy)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A^3 è la matrice associata a T^3 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V b) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche la matrice $-A$.

F V c) Se $\det A = 0$ allora T non è suriettiva.

F V d) Se il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ allora T ammette una base spettrale.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$.

F V b) $\tilde{\mathbf{e}}_3 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V c) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ è la matrice identica 3×3.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Supponiamo che $\mathbf{S}$ ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = 0$.

F V b) Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $(x'_1 + x_1, \ldots, x'_n + x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V c) Se $m = n$ e $\det A < 0$ allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

F V d) Se $\rho(A) = \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

F **V** b) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^3[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

F **V** c) Se B è una matrice invertibile $n \times n$ allora il suo rango è n.

F **V** d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora T è iniettiva se e solo se $\dim \mathrm{Im} T = n$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se il rango di A è uguale a n allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F **V** b) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora non può ammettere soluzione.

F **V** c) Se A è una matrice quadrata invertibile allora $\mathbf{S}$ ammette una e una sola soluzione.

F **V** d) Se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

F **V** b) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica invertibile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

F **V** c) Se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T$.

F **V** d) Se T è l'applicazione lineare identica allora 0 è l'unico autovalore di T.

4) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri complessi.

F **V** b) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.

F **V** c) Insieme delle matrici 3×3 reali simmetriche, rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F **V** d) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri razionali.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) A^3 è la matrice associata a T^3 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** b) Se $\det A = 0$ allora T non è suriettiva.

F **V** c) Se il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ allora T ammette una base spettrale.

F **V** d) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche la matrice $-A$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$, allora $^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$.

F **V** b) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F **V** c) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ è la matrice identica 3×3.

F **V** d) $\tilde{\mathbf{e}}_3 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

F **V** b) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{1006}\right) = 0$.

F **V** c) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F **V** d) Se A ha traccia nulla allora $-A$ ha traccia nulla.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 10 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Qualunque insieme di 10 vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune il solo vettore nullo si ha che $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

F **V** c) $\mathbf{V}$ ammette esattamente 10 basi.

F **V** d) Se $\mathbf{0}$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ contenente il solo vettore nullo, $\mathbf{V} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{V}$.

9) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$.

F **V** b) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$.

F **V** c) $T : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 0, 0)$.

F **V** d) $T : (x, y, z) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se A è una matrice ortogonale anche la matrice A^2 è ortogonale.

F V b) Tutte le matrici simmetriche sono ortogonali.

F V c) Una matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

F V d) La somma di due matrici reali simmetriche dello stesso ordine è una matrice reale simmetrica.

2) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F V b) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F V c) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F V d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'operazione di divisione di polinomi.

3) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (1, 1)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (xy, xy)$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (x, y)$.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se B è una base di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|B| \geq |Y|$ (con $|B|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di B e la cardinalità di Y).

F V b) Due sistemi di generatori qualunque di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

F V c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{U} + \dim^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{V}$.

F V d) Due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ ammettono sempre almeno un vettore in comune.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è ortogonale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora $A = B$.

F V c) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a n.

F V d) T è l'endomorfismo nullo (cioè l'endomorfismo che manda ogni vettore nel vettore nullo) allora ammette almeno una base spettrale.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se n è dispari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** b) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica 1 allora T è la trasformazione lineare identica.

F **V** c) Può accadere che T ammetta un solo autovalore.

F **V** d) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente superiore a n.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $(x'_1 + x_1, \dots, x'_n + x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F **V** b) Supponiamo che $\mathbf{S}$ ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = 0$.

F **V** c) Se $\rho(A) = \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F **V** d) Se $m = n$ e $\det A < 0$ allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

F **V** b) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(0, 0, 0)$.

F **V** c) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se contiene i vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

F **V** d) Se r e s sono rette di $\mathbb{R}^3$ sia parallele che incidenti allora coincidono.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono fra loro isomorfi.

F **V** b) Se due matrici quadrate reali A e B sono fra loro simili, allora anche A^2 e B^2 sono fra loro simili.

F **V** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari suriettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica 1 allora T è la trasformazione lineare identica.

F V b) Può accadere che T ammetta un solo autovalore.

F V c) Il polinomio caratteristico di T può avere grado strettamente superiore a n.

F V d) Se n è dispari allora A è diagonalizzabile per similitudine.

2) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 0, 0)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se B è una matrice invertibile $n \times n$ allora il suo rango è n.

F V b) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora $T(\mathbf{U})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

F V c) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^3[t]$ a $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

F V d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare, allora T è iniettiva se e solo se $\dim \mathrm{Im} T = n$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano il vettore $(0, 0, 0)$.

F V b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se contiene i vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

F V c) Se r e s sono rette di $\mathbb{R}^3$ sia parallele che incidenti allora coincidono.

F V d) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

5) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

F V a) Insieme delle matrici 3×3 reali simmetriche, rispetto alla usuale operazione di somma di matrici.

F V b) $\mathbb{C}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri complessi.

F V c) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di prodotto di numeri razionali.

F V d) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

F **V** a) Se A è ortogonale anche la sua inversa è ortogonale.

F **V** b) Se A è ortogonale anche la sua trasposta è ortogonale.

F **V** c) Se A ha traccia nulla allora $-A$ ha traccia nulla.

F **V** d) Se $\det\left(A^{2012}\right) = 0$ allora $\det\left(A^{1006}\right) = 0$.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 10 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) $\mathbf{V}$ ammette esattamente 10 basi.

F **V** b) Qualunque insieme di 10 vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$.

F **V** c) Se $\mathbf{0}$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ contenente il solo vettore nullo, $\mathbf{V} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{V}$.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune il solo vettore nullo si ha che $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora $A = B$.

F **V** b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a n.

F **V** c) T è l'endomorfismo nullo (cioè l'endomorfismo che manda ogni vettore nel vettore nullo) allora ammette almeno una base spettrale.

F **V** d) Se A è ortogonale allora A è diagonalizzabile per similitudine.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se A è una matrice quadrata invertibile allora $\mathbf{S}$ ammette una e una sola soluzione.

F **V** b) Se il rango di A è uguale a n allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F **V** c) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora non può ammettere soluzione.

F **V** d) Se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T è l'applicazione lineare identica allora 0 è l'unico autovalore di T.

F V b) Se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T$.

F V c) Se A è una matrice quadrata reale simmetrica invertibile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

F V d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno la stessa traccia.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Una matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

F V b) Se A è una matrice ortogonale anche la matrice A^2 è ortogonale.

F V c) Tutte le matrici simmetriche sono ortogonali.

F V d) La somma di due matrici reali simmetriche dello stesso ordine è una matrice reale simmetrica.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ si ha che $\dim \mathbf{U} + \dim^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{V}$.

F V b) Se B è una base di $\mathbf{V}$ e Y è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ allora $|B| \geq |Y|$ (con $|B|$ e $|Y|$ indichiamo rispettivamente la cardinalità di B e la cardinalità di Y).

F V c) Due sistemi di generatori qualunque di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

F V d) Due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ ammettono sempre almeno un vettore in comune.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche la matrice $-A$.

F V b) Se il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ allora T ammette una base spettrale.

F V c) Se $\det A = 0$ allora T non è suriettiva.

F V d) A^3 è la matrice associata a T^3 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono fra loro isomorfi.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensioni finite ed esistono due trasformazioni lineari suriettive $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono isomorfi.

F **V** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

F **V** d) Se due matrici quadrate reali A e B sono fra loro simili, allora anche A^2 e B^2 sono fra loro simili.

6) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y) \mapsto (1, 1)$.

F **V** b) $T : (x, y) \mapsto (x, y)$.

F **V** c) $T : (x, y) \mapsto (xy, xy)$.

F **V** d) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $(x'_1 + x_1, \dots, x'_n + x_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F **V** b) Se $m = n$ e $\det A < 0$ allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

F **V** c) Se $\rho(A) = \rho(C)$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle sue soluzioni.

F **V** d) Supponiamo che $\mathbf{S}$ ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = 0$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) $\tilde{\mathbf{e}}_3 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** b) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ è la matrice identica 3×3.

F **V** c) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$.

9) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono gruppi non commutativi rispetto alle operazioni indicate.

F **V** a) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F **V** b) $\mathbb{Q}$ rispetto alla usuale operazione di somma di numeri razionali.

F **V** c) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

F **V** d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto all'operazione di divisione di polinomi.