Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F V b) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F V c) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F V d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di polinomi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Tutte le matrici con determinante uguale a 1 sono ortogonali.

F V b) La matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ i cui elementi sono tutti uguali a 1 è una matrice ortogonale.

F V c) La somma di due matrici reali 5×5 invertibili è una matrice invertibile.

F V d) Se A e B sono due matrici reali simmetriche 5×5 e $AB = BA$, allora anche AB è una matrice reale simmetrica.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) L'unione di due sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ è ancora un sistema di generatori di $\mathbf{V}$.

F V b) Se S è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ contenente esattamente n vettori, allora S è una base di $\mathbf{V}$.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune solo il vettore nullo.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora ${}^\perp\mathbf{W} \subseteq {}^\perp\mathbf{U}$.

4) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (3z, 2y, x)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x + y + z)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (\sin x, \cos y, 0)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (1, 0, 0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^{24}[t]$ a $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

F V b) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare iniettiva, allora $\dim T(\mathbf{U}) = \dim \mathbf{U}$.

F V c) Se B è una matrice reale $n \times n$ di rango n, allora è invertibile.

F V d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari iniettive, allora $S \circ T$ è una trasformazione lineare iniettiva.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora ammette una e una sola soluzione.

F **V** b) Se il rango di A è strettamente inferiore a n allora **S** non può ammettere una e una sola soluzione.

F **V** c) Se A è una matrice quadrata non invertibile allora **S** ammette sempre infinite soluzioni.

F **V** d) Se **S** ammette almeno una soluzione allora $n = m$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) T non può ammettere $n + 1$ autovalori distinti.

F **V** b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso determinante.

F **V** c) Se A non ammette 0 come autovalore, allora è invertibile.

F **V** d) Se A è simmetrica, allora T ammette almeno un autovalore reale.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) T ammette sempre almeno una base spettrale.

F **V** b) Una base di $\mathbb{R}^n$ è spettrale per T se e solo se è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

F **V** c) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F **V** d) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ è il quadrato del polinomio caratteristico di T.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3$.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** c) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F **V** d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2)$ è la matrice identica 3×3.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $\rho(C) = m - 1$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

F V b) Se $m = n$ e $\det A > 0$ allora **S** ammette soluzione.

F V c) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a **S** allora $(x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F V d) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = m$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y + z = 1$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

F V b) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano contemporaneamente i due vettori $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$.

F V c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}$ è multiplo di $\mathbf{u}$, allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.

F V d) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se tutti i suoi vettori hanno norma 1.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste una matrice invertibile $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = E^{-1}BE$.

F V c) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a 1.

4) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto ((x + 2y)^4, (3x - y)^4)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (x \cdot \sin y, y \cdot \cos x)$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (x, 0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Una matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

F **V** b) Moltiplicando una matrice ortogonale per un numero reale non nullo si ottiene una matrice ortogonale.

F **V** c) Se $A, I \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ e I è la matrice identica allora $AI = IA$.

F **V** d) Moltiplicando una matrice quadrata reale a traccia nulla per un numero reale si ottiene una matrice a traccia nulla.

6) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F **V** a) Insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di interi.

F **V** b) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri complessi.

F **V** c) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

F **V** d) Insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri reali.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ (Tr denota l'operatore traccia).

F **V** b) Tutti gli spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro.

F **V** c) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare suriettiva, allora $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F **V** d) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso determinante.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F **V** b) Qualunque insieme di 7 vettori distinti di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente.

F **V** c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$.

F **V** d) Esiste almeno un insieme di 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$ che sia linearmente indipendente.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) I polinomi caratteristici di T e $2T$ sono fra loro uguali.

F **V** b) Se T ammette 0 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare nulla.

F **V** c) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente maggiori di 0, allora $\det A > 0$.

F **V** d) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica infinita.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se A e B sono due matrici reali simmetriche 5×5 e $AB = BA$, allora anche AB è una matrice reale simmetrica.

F V b) Tutte le matrici con determinante uguale a 1 sono ortogonali.

F V c) La matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ i cui elementi sono tutti uguali a 1 è una matrice ortogonale.

F V d) La somma di due matrici reali 5×5 invertibili è una matrice invertibile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari iniettive, allora $S \circ T$ è una trasformazione lineare iniettiva.

F V b) Se B è una matrice reale $n \times n$ di rango n, allora è invertibile.

F V c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare iniettiva, allora $\dim T(\mathbf{U}) = \dim \mathbf{U}$.

F V d) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^{24}[t]$ a $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora $n = m$.

F V b) Se A è una matrice quadrata non invertibile allora $\mathbf{S}$ ammette sempre infinite soluzioni.

F V c) Se il rango di A è strettamente inferiore a n allora $\mathbf{S}$ non può ammettere una e una sola soluzione.

F V d) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette una e una sola soluzione.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica infinita.

F V b) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente maggiori di 0, allora $\det A > 0$.

F V c) I polinomi caratteristici di T e $2T$ sono fra loro uguali.

F V d) Se T ammette 0 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare nulla.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$.

F V b) L'unione di due sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ è ancora un sistema di generatori di $\mathbf{V}$.

F V c) Se S è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ contenente esattamente n vettori, allora S è una base di $\mathbf{V}$.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune solo il vettore nullo.

6) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (1, 0, 0)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (\sin x, \cos y, 0)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x + y + z)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (3z, 2y, x)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a 1.

F V b) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

F V d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste una matrice invertibile $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = E^{-1}BE$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se tutti i suoi vettori hanno norma 1.

F V b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}$ è multiplo di $\mathbf{u}$, allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.

F V c) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y + z = 1$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

F V d) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano contemporaneamente i due vettori $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$.

9) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di polinomi.

F V b) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F V c) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F V d) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^\perp\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V c) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2)$ è la matrice identica 3×3.

F V d) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso determinante.

F V b) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare suriettiva, allora $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F V c) Tutti gli spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro.

F V d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ (Tr denota l'operatore traccia).

3) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri reali.

F V b) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri complessi.

F V c) Insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di interi.

F V d) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Supponiamo che $\mathbf{S}$ ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = m$.

F V b) Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$ allora $(x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V c) Se $m = n$ e $\det A > 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F V d) Se $\rho(C) = m - 1$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Una base di $\mathbb{R}^n$ è spettrale per T se e solo se è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

F **V** b) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F **V** c) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ è il quadrato del polinomio caratteristico di T.

F **V** d) T ammette sempre almeno una base spettrale.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso determinante.

F **V** b) Se A non ammette 0 come autovalore, allora è invertibile.

F **V** c) Se A è simmetrica, allora T ammette almeno un autovalore reale.

F **V** d) T non può ammettere $n + 1$ autovalori distinti.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Esiste almeno un insieme di 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$ che sia linearmente indipendente.

F **V** b) Qualunque insieme di 7 vettori distinti di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente.

F **V** c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Moltiplicando una matrice quadrata reale a traccia nulla per un numero reale si ottiene una matrice a traccia nulla.

F **V** b) Moltiplicando una matrice ortogonale per un numero reale non nullo si ottiene una matrice ortogonale.

F **V** c) Una matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

F **V** d) Se $A, I \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ e I è la matrice identica allora $AI = IA$.

9) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y) \mapsto (x, 0)$.

F **V** b) $T : (x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.

F **V** c) $T : (x, y) \mapsto (x \cdot \sin y, y \cdot \cos x)$.

F **V** d) $T : (x, y) \mapsto ((x + 2y)^4, (3x - y)^4)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Moltiplicando una matrice quadrata reale a traccia nulla per un numero reale si ottiene una matrice a traccia nulla.

F V b) Una matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

F V c) Moltiplicando una matrice ortogonale per un numero reale non nullo si ottiene una matrice ortogonale.

F V d) Se $A, I \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ e I è la matrice identica allora $AI = IA$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo dei numeri reali.

F V a) Esiste almeno un insieme di 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$ che sia linearmente indipendente.

F V b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V c) Qualunque insieme di 7 vettori distinti di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^n$ è spettrale per T se e solo se è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

F V b) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ è il quadrato del polinomio caratteristico di T.

F V c) T ammette sempre almeno una base spettrale.

F V d) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

4) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x + y + z)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (3z, 2y, x)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (1, 0, 0)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (\sin x, \cos y, 0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se **U** è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale **V** e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare iniettiva, allora $\dim T(\mathbf{U}) = \dim \mathbf{U}$.

F V b) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^{24}[t]$ a $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

F V c) Se **V** è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari iniettive, allora $S \circ T$ è una trasformazione lineare iniettiva.

F V d) Se B è una matrice reale $n \times n$ di rango n, allora è invertibile.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di A è strettamente inferiore a n allora **S** non può ammettere una e una sola soluzione.

F V b) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora ammette una e una sola soluzione.

F V c) Se **S** ammette almeno una soluzione allora $n = m$.

F V d) Se A è una matrice quadrata non invertibile allora **S** ammette sempre infinite soluzioni.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso determinante.

F V b) Se A è simmetrica, allora T ammette almeno un autovalore reale.

F V c) T non può ammettere $n + 1$ autovalori distinti.

F V d) Se A non ammette 0 come autovalore, allora è invertibile.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se **U** è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2)$ è la matrice identica 3×3.

F V c) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3$.

F V d) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

9) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri reali.

F V b) Insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di interi.

F V c) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri complessi.

F V d) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente maggiori di 0, allora $\det A > 0$.

F **V** b) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica infinita.

F **V** c) Se T ammette 0 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare nulla.

F **V** d) I polinomi caratteristici di T e $2T$ sono fra loro uguali.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se $m = n$ e $\det A > 0$ allora **S** ammette soluzione.

F **V** b) Se $\rho(C) = m - 1$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

F **V** c) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a **S** allora $(x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F **V** d) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = m$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) La matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ i cui elementi sono tutti uguali a 1 è una matrice ortogonale.

F **V** b) La somma di due matrici reali 5×5 invertibili è una matrice invertibile.

F **V** c) Tutte le matrici con determinante uguale a 1 sono ortogonali.

F **V** d) Se A e B sono due matrici reali simmetriche 5×5 e $AB = BA$, allora anche AB è una matrice reale simmetrica.

4) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F **V** a) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F **V** b) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F **V** c) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F **V** d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di polinomi.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a 1.

F **V** c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste una matrice invertibile $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = E^{-1}BE$.

F **V** d) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}$ è multiplo di $\mathbf{u}$, allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.

F **V** b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se tutti i suoi vettori hanno norma 1.

F **V** c) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano contemporaneamente i due vettori $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$.

F **V** d) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y + z = 1$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

7) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y) \mapsto (x \cdot \sin y, y \cdot \cos x)$.

F **V** b) $T : (x, y) \mapsto ((x + 2y)^4, (3x - y)^4)$.

F **V** c) $T : (x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.

F **V** d) $T : (x, y) \mapsto (x, 0)$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Se S è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ contenente esattamente n vettori, allora S è una base di $\mathbf{V}$.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune solo il vettore nullo.

F **V** c) L'unione di due sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ è ancora un sistema di generatori di $\mathbf{V}$.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Tutti gli spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro.

F **V** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ (Tr denota l'operatore traccia).

F **V** c) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare suriettiva, allora $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F **V** d) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso determinante.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Moltiplicando una matrice ortogonale per un numero reale non nullo si ottiene una matrice ortogonale.

F V b) Se $A, I \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ e I è la matrice identica allora $AI = IA$.

F V c) Moltiplicando una matrice quadrata reale a traccia nulla per un numero reale si ottiene una matrice a traccia nulla.

F V d) Una matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo dei numeri reali.

F V a) Qualunque insieme di 7 vettori distinti di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente.

F V b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$.

F V c) Esiste almeno un insieme di 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$ che sia linearmente indipendente.

F V d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

3) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x + y + z)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (\sin x, \cos y, 0)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (3z, 2y, x)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (1, 0, 0)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare iniettiva, allora $\dim T(\mathbf{U}) = \dim \mathbf{U}$.

F V b) Se B è una matrice reale $n \times n$ di rango n, allora è invertibile.

F V c) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^{24}[t]$ a $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

F V d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari iniettive, allora $S \circ T$ è una trasformazione lineare iniettiva.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se tutti i suoi vettori hanno norma 1.

F V b) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y + z = 1$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

F V c) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano contemporaneamente i due vettori $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$.

F V d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}$ è multiplo di $\mathbf{u}$, allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.

6) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri complessi.

F V b) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

F V c) Insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri reali.

F V d) Insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di interi.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se il rango di A è strettamente inferiore a n allora **S** non può ammettere una e una sola soluzione.

F V b) Se A è una matrice quadrata non invertibile allora **S** ammette sempre infinite soluzioni.

F V c) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora ammette una e una sola soluzione.

F V d) Se **S** ammette almeno una soluzione allora $n = m$.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica infinita.

F V b) I polinomi caratteristici di T e $2T$ sono fra loro uguali.

F V c) Se T ammette 0 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare nulla.

F V d) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente maggiori di 0, allora $\det A > 0$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a 1.

F V b) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

F V c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste una matrice invertibile $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = E^{-1}BE$.

F V d) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ (Tr denota l'operatore traccia).

F V b) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare suriettiva, allora $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F V c) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso determinante.

F V d) Tutti gli spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F V b) Una base di $\mathbb{R}^n$ è spettrale per T se e solo se è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

F V c) T ammette sempre almeno una base spettrale.

F V d) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ è il quadrato del polinomio caratteristico di T.

3) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F V b) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F V c) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di polinomi.

F V d) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V b) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V c) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3$.

F V d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2)$ è la matrice identica 3×3.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) L'unione di due sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ è ancora un sistema di generatori di $\mathbf{V}$.

F V b) Se S è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ contenente esattamente n vettori, allora S è una base di $\mathbf{V}$.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune solo il vettore nullo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Tutte le matrici con determinante uguale a 1 sono ortogonali.

F V b) La matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ i cui elementi sono tutti uguali a 1 è una matrice ortogonale.

F V c) Se A e B sono due matrici reali simmetriche 5×5 e $AB = BA$, allora anche AB è una matrice reale simmetrica.

F V d) La somma di due matrici reali 5×5 invertibili è una matrice invertibile.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $\rho(C) = m - 1$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

F V b) Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$ allora $(x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V c) Supponiamo che $\mathbf{S}$ ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = m$.

F V d) Se $m = n$ e $\det A > 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

8) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto ((x + 2y)^4, (3x - y)^4)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (x, 0)$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (x \cdot \sin y, y \cdot \cos x)$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A non ammette 0 come autovalore, allora è invertibile.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso determinante.

F V c) T non può ammettere $n + 1$ autovalori distinti.

F V d) Se A è simmetrica, allora T ammette almeno un autovalore reale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se S è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ contenente esattamente n vettori, allora S è una base di $\mathbf{V}$.

F V b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune solo il vettore nullo.

F V d) L'unione di due sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ è ancora un sistema di generatori di $\mathbf{V}$.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^n$ è spettrale per T se e solo se è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

F V b) T ammette sempre almeno una base spettrale.

F V c) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F V d) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ è il quadrato del polinomio caratteristico di T.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3$.

F V c) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2)$ è la matrice identica 3×3.

4) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (1, 0, 0)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (\sin x, \cos y, 0)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (3z, 2y, x)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x + y + z)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari iniettive, allora $S \circ T$ è una trasformazione lineare iniettiva.

F V b) Se B è una matrice reale $n \times n$ di rango n, allora è invertibile.

F V c) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^{24}[t]$ a $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

F V d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare iniettiva, allora $\dim T(\mathbf{U}) = \dim \mathbf{U}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora $n = m$.

F V b) Se A è una matrice quadrata non invertibile allora $\mathbf{S}$ ammette sempre infinite soluzioni.

F V c) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette una e una sola soluzione.

F V d) Se il rango di A è strettamente inferiore a n allora $\mathbf{S}$ non può ammettere una e una sola soluzione.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso determinante.

F V b) T non può ammettere $n+1$ autovalori distinti.

F V c) Se A non ammette 0 come autovalore, allora è invertibile.

F V d) Se A è simmetrica, allora T ammette almeno un autovalore reale.

8) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F V b) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di polinomi.

F V c) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F V d) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ i cui elementi sono tutti uguali a 1 è una matrice ortogonale.

F V b) Se A e B sono due matrici reali simmetriche 5×5 e $AB = BA$, allora anche AB è una matrice reale simmetrica.

F V c) La somma di due matrici reali 5×5 invertibili è una matrice invertibile.

F V d) Tutte le matrici con determinante uguale a 1 sono ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste una matrice invertibile $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = E^{-1}BE$.

F V c) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

F V d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a 1.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente maggiori di 0, allora $\det A > 0$.

F V b) Se T ammette 0 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare nulla.

F V c) I polinomi caratteristici di T e $2T$ sono fra loro uguali.

F V d) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica infinita.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $A, I \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ e I è la matrice identica allora $AI = IA$.

F V b) Una matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

F V c) Moltiplicando una matrice ortogonale per un numero reale non nullo si ottiene una matrice ortogonale.

F V d) Moltiplicando una matrice quadrata reale a traccia nulla per un numero reale si ottiene una matrice a traccia nulla.

4) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

F V b) Insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di interi.

F V c) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri complessi.

F V d) Insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri reali.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$.

F V b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V c) Qualunque insieme di 7 vettori distinti di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente.

F V d) Esiste almeno un insieme di 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$ che sia linearmente indipendente.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $m = n$ e $\det A > 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F V b) Se $\rho(C) = m - 1$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

F V c) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$ allora $(x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V d) Supponiamo che $\mathbf{S}$ ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = m$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Tutti gli spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro.

F V b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ (Tr denota l'operatore traccia).

F V c) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare suriettiva, allora $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F V d) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso determinante.

8) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (x \cdot \sin y, y \cdot \cos x)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto ((x + 2y)^4, (3x - y)^4)$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (x, 0)$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}$ è multiplo di $\mathbf{u}$, allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.

F V b) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano contemporaneamente i due vettori $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$.

F V c) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y + z = 1$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

F V d) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se tutti i suoi vettori hanno norma 1.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (1, 0, 0)$.
F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (3z, 2y, x)$.
F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x + y + z)$.
F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (\sin x, \cos y, 0)$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se **S** ammette almeno una soluzione allora $n = m$.
F V b) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora ammette una e una sola soluzione.
F V c) Se il rango di A è strettamente inferiore a n allora **S** non può ammettere una e una sola soluzione.
F V d) Se A è una matrice quadrata non invertibile allora **S** ammette sempre infinite soluzioni.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica infinita.
F V b) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente maggiori di 0, allora $\det A > 0$.
F V c) Se T ammette 0 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare nulla.
F V d) I polinomi caratteristici di T e $2T$ sono fra loro uguali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari iniettive, allora $S \circ T$ è una trasformazione lineare iniettiva.
F V b) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^{24}[t]$ a $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.
F V c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare iniettiva, allora $\dim T(\mathbf{U}) = \dim \mathbf{U}$.
F V d) Se B è una matrice reale $n \times n$ di rango n, allora è invertibile.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a 1.

F V b) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste una matrice invertibile $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = E^{-1}BE$.

F V d) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se tutti i suoi vettori hanno norma 1.

F V b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}$ è multiplo di $\mathbf{u}$, allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.

F V c) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano contemporaneamente i due vettori $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$.

F V d) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y + z = 1$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

7) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di polinomi.

F V b) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F V c) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F V d) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se A e B sono due matrici reali simmetriche 5×5 e $AB = BA$, allora anche AB è una matrice reale simmetrica.

F V b) La somma di due matrici reali 5×5 invertibili è una matrice invertibile.

F V c) La matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ i cui elementi sono tutti uguali a 1 è una matrice ortogonale.

F V d) Tutte le matrici con determinante uguale a 1 sono ortogonali.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$.

F V b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune solo il vettore nullo.

F V c) Se S è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ contenente esattamente n vettori, allora S è una base di $\mathbf{V}$.

F V d) L'unione di due sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ è ancora un sistema di generatori di $\mathbf{V}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Moltiplicando una matrice ortogonale per un numero reale non nullo si ottiene una matrice ortogonale.

F V b) Se $A, I \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ e I è la matrice identica allora $AI = IA$.

F V c) Una matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

F V d) Moltiplicando una matrice quadrata reale a traccia nulla per un numero reale si ottiene una matrice a traccia nulla.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $m = n$ e $\det A > 0$ allora **S** ammette soluzione.

F V b) Se $\rho(C) = m - 1$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

F V c) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = m$.

F V d) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a **S** allora $(x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso determinante.

F V b) T non può ammettere $n + 1$ autovalori distinti.

F V c) Se A è simmetrica, allora T ammette almeno un autovalore reale.

F V d) Se A non ammette 0 come autovalore, allora è invertibile.

4) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo dei numeri reali.

F V a) Qualunque insieme di 7 vettori distinti di **V** è linearmente dipendente.

F V b) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$.

F V c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di **V**, allora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di **V**.

F V d) Esiste almeno un insieme di 3 vettori distinti di **V** che sia linearmente indipendente.

5) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri complessi.

F V b) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

F V c) Insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di interi.

F V d) Insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri reali.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^n$ è spettrale per T se e solo se è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

F V b) T ammette sempre almeno una base spettrale.

F V c) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ è il quadrato del polinomio caratteristico di T.

F V d) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Tutti gli spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro.

F V b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ (Tr denota l'operatore traccia).

F V c) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso determinante.

F V d) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare suriettiva, allora $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

8) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (x \cdot \sin y, y \cdot \cos x)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto ((x + 2y)^4, (3x - y)^4)$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (x, 0)$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3$.

F V c) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2)$ è la matrice identica 3×3.

F V d) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V b) Esiste almeno un insieme di 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$ che sia linearmente indipendente.

F V c) Qualunque insieme di 7 vettori distinti di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$.

2) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (\sin x, \cos y, 0)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (1, 0, 0)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x + y + z)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (3z, 2y, x)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se B è una matrice reale $n \times n$ di rango n, allora è invertibile.

F V b) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari iniettive, allora $S \circ T$ è una trasformazione lineare iniettiva.

F V c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare iniettiva, allora $\dim T(\mathbf{U}) = \dim \mathbf{U}$.

F V d) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^{24}[t]$ a $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se A è una matrice quadrata non invertibile allora $\mathbf{S}$ ammette sempre infinite soluzioni.

F V b) Se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora $n = m$.

F V c) Se il rango di A è strettamente inferiore a n allora $\mathbf{S}$ non può ammettere una e una sola soluzione.

F V d) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette una e una sola soluzione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Una matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

F V b) Moltiplicando una matrice quadrata reale a traccia nulla per un numero reale si ottiene una matrice a traccia nulla.

F V c) Moltiplicando una matrice ortogonale per un numero reale non nullo si ottiene una matrice ortogonale.

F V d) Se $A, I \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ e I è la matrice identica allora $AI = IA$.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F **V** b) Una base di $\mathbb{R}^n$ è spettrale per T se e solo se è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

F **V** c) T ammette sempre almeno una base spettrale.

F **V** d) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ è il quadrato del polinomio caratteristico di T.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** c) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3$.

F **V** d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2)$ è la matrice identica 3×3.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se A non ammette 0 come autovalore, allora è invertibile.

F **V** b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso determinante.

F **V** c) T non può ammettere $n + 1$ autovalori distinti.

F **V** d) Se A è simmetrica, allora T ammette almeno un autovalore reale.

9) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F **V** a) Insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di interi.

F **V** b) Insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri reali.

F **V** c) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri complessi.

F **V** d) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a 1.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste una matrice invertibile $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = E^{-1}BE$.

F V c) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

F V d) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica infinita.

F V b) Se T ammette 0 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare nulla.

F V c) I polinomi caratteristici di T e $2T$ sono fra loro uguali.

F V d) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente maggiori di 0, allora $\det A > 0$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La somma di due matrici reali 5×5 invertibili è una matrice invertibile.

F V b) Se A e B sono due matrici reali simmetriche 5×5 e $AB = BA$, allora anche AB è una matrice reale simmetrica.

F V c) La matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ i cui elementi sono tutti uguali a 1 è una matrice ortogonale.

F V d) Tutte le matrici con determinante uguale a 1 sono ortogonali.

4) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F V b) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di polinomi.

F V c) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F V d) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

5) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (x, 0)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (x \cdot \sin y, y \cdot \cos x)$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto ((x + 2y)^4, (3x - y)^4)$.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune solo il vettore nullo.

F V b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$.

F V c) Se S è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ contenente esattamente n vettori, allora S è una base di $\mathbf{V}$.

F V d) L'unione di due sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ è ancora un sistema di generatori di $\mathbf{V}$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se tutti i suoi vettori hanno norma 1.

F V b) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano contemporaneamente i due vettori $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$.

F V c) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y + z = 1$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

F V d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}$ è multiplo di $\mathbf{u}$, allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso determinante.

F V b) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare suriettiva, allora $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F V c) Tutti gli spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro.

F V d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ (Tr denota l'operatore traccia).

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Supponiamo che $\mathbf{S}$ ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = m$.

F V b) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$ allora $(x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V c) Se $m = n$ e $\det A > 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F V d) Se $\rho(C) = m - 1$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x + y + z)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (\sin x, \cos y, 0)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (1, 0, 0)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (3z, 2y, x)$.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente maggiori di 0, allora $\det A > 0$.

F V b) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica infinita.

F V c) I polinomi caratteristici di T e $2T$ sono fra loro uguali.

F V d) Se T ammette 0 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare nulla.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare iniettiva, allora $\dim T(\mathbf{U}) = \dim \mathbf{U}$.

F V b) Se B è una matrice reale $n \times n$ di rango n, allora è invertibile.

F V c) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari iniettive, allora $S \circ T$ è una trasformazione lineare iniettiva.

F V d) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^{24}[t]$ a $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a 1.

F V c) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

F V d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste una matrice invertibile $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = E^{-1}BE$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}$ è multiplo di $\mathbf{u}$, allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.

F **V** b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se tutti i suoi vettori hanno norma 1.

F **V** c) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y + z = 1$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

F **V** d) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano contemporaneamente i due vettori $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se il rango di A è strettamente inferiore a n allora $\mathbf{S}$ non può ammettere una e una sola soluzione.

F **V** b) Se A è una matrice quadrata non invertibile allora $\mathbf{S}$ ammette sempre infinite soluzioni.

F **V** c) Se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora $n = m$.

F **V** d) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette una e una sola soluzione.

7) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F **V** a) Insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri reali.

F **V** b) Insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di interi.

F **V** c) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

F **V** d) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri complessi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Moltiplicando una matrice quadrata reale a traccia nulla per un numero reale si ottiene una matrice a traccia nulla.

F **V** b) Una matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

F **V** c) Se $A, I \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ e I è la matrice identica allora $AI = IA$.

F **V** d) Moltiplicando una matrice ortogonale per un numero reale non nullo si ottiene una matrice ortogonale.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Esiste almeno un insieme di 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$ che sia linearmente indipendente.

F **V** b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F **V** c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$.

F **V** d) Qualunque insieme di 7 vettori distinti di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di polinomi.

F V b) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F V c) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F V d) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = m$.

F V b) Se $m = n$ e $\det A > 0$ allora **S** ammette soluzione.

F V c) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a **S** allora $(x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F V d) Se $\rho(C) = m - 1$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

3) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$.

F V b) Se S è un sistema di generatori di **V** contenente esattamente n vettori, allora S è una base di **V**.

F V c) L'unione di due sistemi di generatori di **V** è ancora un sistema di generatori di **V**.

F V d) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** e $\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$, allora **U** e **W** hanno in comune solo il vettore nullo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se A e B sono due matrici reali simmetriche 5×5 e $AB = BA$, allora anche AB è una matrice reale simmetrica.

F V b) La matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ i cui elementi sono tutti uguali a 1 è una matrice ortogonale.

F V c) Tutte le matrici con determinante uguale a 1 sono ortogonali.

F V d) La somma di due matrici reali 5×5 invertibili è una matrice invertibile.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso determinante.

F V b) Tutti gli spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro.

F V c) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare suriettiva, allora $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F V d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ (Tr denota l'operatore traccia).

6) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (x, 0)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (x \cdot \sin y, y \cdot \cos x)$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto ((x + 2y)^4, (3x - y)^4)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è simmetrica, allora T ammette almeno un autovalore reale.

F V b) Se A non ammette 0 come autovalore, allora è invertibile.

F V c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso determinante.

F V d) T non può ammettere $n + 1$ autovalori distinti.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2)$ è la matrice identica 3×3.

F V b) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V c) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V d) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ è il quadrato del polinomio caratteristico di T.

F V b) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F V c) Una base di $\mathbb{R}^n$ è spettrale per T se e solo se è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

F V d) T ammette sempre almeno una base spettrale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^n$ è spettrale per T se e solo se è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

F V b) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F V c) T ammette sempre almeno una base spettrale.

F V d) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ è il quadrato del polinomio caratteristico di T.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V c) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3$.

F V d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2)$ è la matrice identica 3×3.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se S è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ contenente esattamente n vettori, allora S è una base di $\mathbf{V}$.

F V b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune solo il vettore nullo.

F V d) L'unione di due sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ è ancora un sistema di generatori di $\mathbf{V}$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette una e una sola soluzione.

F V b) Se A è una matrice quadrata non invertibile allora $\mathbf{S}$ ammette sempre infinite soluzioni.

F V c) Se il rango di A è strettamente inferiore a n allora $\mathbf{S}$ non può ammettere una e una sola soluzione.

F V d) Se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora $n = m$.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso determinante.

F **V** b) Se A non ammette 0 come autovalore, allora è invertibile.

F **V** c) T non può ammettere $n+1$ autovalori distinti.

F **V** d) Se A è simmetrica, allora T ammette almeno un autovalore reale.

6) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F **V** a) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F **V** b) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di polinomi.

F **V** c) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F **V** d) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) La matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ i cui elementi sono tutti uguali a 1 è una matrice ortogonale.

F **V** b) Se A e B sono due matrici reali simmetriche 5×5 e $AB = BA$, allora anche AB è una matrice reale simmetrica.

F **V** c) La somma di due matrici reali 5×5 invertibili è una matrice invertibile.

F **V** d) Tutte le matrici con determinante uguale a 1 sono ortogonali.

8) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y, z) \mapsto (3z, 2y, x)$.

F **V** b) $T : (x, y, z) \mapsto (\sin x, \cos y, 0)$.

F **V** c) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x + y + z)$.

F **V** d) $T : (x, y, z) \mapsto (1, 0, 0)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^{24}[t]$ a $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

F **V** b) Se B è una matrice reale $n \times n$ di rango n, allora è invertibile.

F **V** c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare iniettiva, allora $\dim T(\mathbf{U}) = \dim \mathbf{U}$.

F **V** d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari iniettive, allora $S \circ T$ è una trasformazione lineare iniettiva.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.
F **V** b) $T : (x, y) \mapsto ((x + 2y)^4, (3x - y)^4)$.
F **V** c) $T : (x, y) \mapsto (x, 0)$.
F **V** d) $T : (x, y) \mapsto (x \cdot \sin y, y \cdot \cos x)$.

2) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F **V** a) Insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di interi.
F **V** b) Insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri reali.
F **V** c) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.
F **V** d) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri complessi.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a **S** allora $(x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.
F **V** b) Se $\rho(C) = m - 1$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.
F **V** c) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = m$.
F **V** d) Se $m = n$ e $\det A > 0$ allora **S** ammette soluzione.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano contemporaneamente i due vettori $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$.
F **V** b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se tutti i suoi vettori hanno norma 1.
F **V** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}$ è multiplo di $\mathbf{u}$, allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.
F **V** d) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y + z = 1$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V b) Esiste almeno un insieme di 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$ che sia linearmente indipendente.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$.

F V d) Qualunque insieme di 7 vettori distinti di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Una matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

F V b) Moltiplicando una matrice quadrata reale a traccia nulla per un numero reale si ottiene una matrice a traccia nulla.

F V c) Se $A, I \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ e I è la matrice identica allora $AI = IA$.

F V d) Moltiplicando una matrice ortogonale per un numero reale non nullo si ottiene una matrice ortogonale.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ammette 0 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare nulla.

F V b) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica infinita.

F V c) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente maggiori di 0, allora $\det A > 0$.

F V d) I polinomi caratteristici di T e $2T$ sono fra loro uguali.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare suriettiva, allora $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F V b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ (Tr denota l'operatore traccia).

F V c) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso determinante.

F V d) Tutti gli spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste una matrice invertibile $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = E^{-1}BE$.

F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a 1.

F V c) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V d) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x + y + z)$.

F **V** b) $T : (x, y, z) \mapsto (3z, 2y, x)$.

F **V** c) $T : (x, y, z) \mapsto (\sin x, \cos y, 0)$.

F **V** d) $T : (x, y, z) \mapsto (1, 0, 0)$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare iniettiva, allora $\dim T(\mathbf{U}) = \dim \mathbf{U}$.

F **V** b) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^{24}[t]$ a $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

F **V** c) Se B è una matrice reale $n \times n$ di rango n, allora è invertibile.

F **V** d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari iniettive, allora $S \circ T$ è una trasformazione lineare iniettiva.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a 1.

F **V** b) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** c) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

F **V** d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste una matrice invertibile $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = E^{-1}BE$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se tutti i suoi vettori hanno norma 1.

F **V** b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}$ è multiplo di $\mathbf{u}$, allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.

F **V** c) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y + z = 1$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

F **V** d) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano contemporaneamente i due vettori $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se il rango di A è strettamente inferiore a n allora **S** non può ammettere una e una sola soluzione.

F **V** b) Se **S** è un sistema lineare omogeneo allora ammette una e una sola soluzione.

F **V** c) Se A è una matrice quadrata non invertibile allora **S** ammette sempre infinite soluzioni.

F **V** d) Se **S** ammette almeno una soluzione allora $n = m$.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica infinita.

F **V** b) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente maggiori di 0, allora $\det A > 0$.

F **V** c) I polinomi caratteristici di T e $2T$ sono fra loro uguali.

F **V** d) Se T ammette 0 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare nulla.

7) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F **V** a) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di polinomi.

F **V** b) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F **V** c) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F **V** d) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se A e B sono due matrici reali simmetriche 5×5 e $AB = BA$, allora anche AB è una matrice reale simmetrica.

F **V** b) La somma di due matrici reali 5×5 invertibili è una matrice invertibile.

F **V** c) Tutte le matrici con determinante uguale a 1 sono ortogonali.

F **V** d) La matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ i cui elementi sono tutti uguali a 1 è una matrice ortogonale.

9) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$.

F **V** b) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** e $\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$, allora **U** e **W** hanno in comune solo il vettore nullo.

F **V** c) L'unione di due sistemi di generatori di **V** è ancora un sistema di generatori di **V**.

F **V** d) Se S è un sistema di generatori di **V** contenente esattamente n vettori, allora S è una base di **V**.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $A, I \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ e I è la matrice identica allora $AI = IA$.

F V b) Moltiplicando una matrice quadrata reale a traccia nulla per un numero reale si ottiene una matrice a traccia nulla.

F V c) Moltiplicando una matrice ortogonale per un numero reale non nullo si ottiene una matrice ortogonale.

F V d) Una matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

2) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

F V b) Insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri reali.

F V c) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri complessi.

F V d) Insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di interi.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$.

F V b) Esiste almeno un insieme di 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$ che sia linearmente indipendente.

F V c) Qualunque insieme di 7 vettori distinti di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente.

F V d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso determinante.

F V b) T non può ammettere $n + 1$ autovalori distinti.

F V c) Se A non ammette 0 come autovalore, allora è invertibile.

F V d) Se A è simmetrica, allora T ammette almeno un autovalore reale.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso determinante.

F **V** b) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare suriettiva, allora $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F **V** c) Tutti gli spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro.

F **V** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ (Tr denota l'operatore traccia).

6) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y) \mapsto (x, 0)$.

F **V** b) $T : (x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.

F **V** c) $T : (x, y) \mapsto (x \cdot \sin y, y \cdot \cos x)$.

F **V** d) $T : (x, y) \mapsto ((x + 2y)^4, (3x - y)^4)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Una base di $\mathbb{R}^n$ è spettrale per T se e solo se è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

F **V** b) T ammette sempre almeno una base spettrale.

F **V** c) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F **V** d) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ è il quadrato del polinomio caratteristico di T.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora $^\perp\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** b) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3$.

F **V** c) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F **V** d) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2)$ è la matrice identica 3×3.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Supponiamo che $\mathbf{S}$ ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = m$.

F **V** b) Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$ allora $(x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F **V** c) Se $m = n$ e $\det A > 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F **V** d) Se $\rho(C) = m - 1$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare iniettiva, allora $\dim T(\mathbf{U}) = \dim \mathbf{U}$.

F **V** b) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^{24}[t]$ a $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

F **V** c) Se B è una matrice reale $n \times n$ di rango n, allora è invertibile.

F **V** d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari iniettive, allora $S \circ T$ è una trasformazione lineare iniettiva.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F **V** a) Se il rango di A è strettamente inferiore a n allora $\mathbf{S}$ non può ammettere una e una sola soluzione.

F **V** b) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette una e una sola soluzione.

F **V** c) Se A è una matrice quadrata non invertibile allora $\mathbf{S}$ ammette sempre infinite soluzioni.

F **V** d) Se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora $n = m$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso determinante.

F **V** b) Se A non ammette 0 come autovalore, allora è invertibile.

F **V** c) Se A è simmetrica, allora T ammette almeno un autovalore reale.

F **V** d) T non può ammettere $n + 1$ autovalori distinti.

4) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F **V** a) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri complessi.

F **V** b) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

F **V** c) Insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di interi.

F **V** d) Insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri reali.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^n$ è spettrale per T se e solo se è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

F V b) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F V c) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ è il quadrato del polinomio caratteristico di T.

F V d) T ammette sempre almeno una base spettrale.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V c) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2)$ è la matrice identica 3×3.

F V d) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Moltiplicando una matrice ortogonale per un numero reale non nullo si ottiene una matrice ortogonale.

F V b) Se $A, I \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ e I è la matrice identica allora $AI = IA$.

F V c) Una matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

F V d) Moltiplicando una matrice quadrata reale a traccia nulla per un numero reale si ottiene una matrice a traccia nulla.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo dei numeri reali.

F V a) Qualunque insieme di 7 vettori distinti di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente.

F V b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$.

F V c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V d) Esiste almeno un insieme di 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$ che sia linearmente indipendente.

9) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x + y + z)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (3z, 2y, x)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (\sin x, \cos y, 0)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (1, 0, 0)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ i cui elementi sono tutti uguali a 1 è una matrice ortogonale.

F V b) Tutte le matrici con determinante uguale a 1 sono ortogonali.

F V c) La somma di due matrici reali 5×5 invertibili è una matrice invertibile.

F V d) Se A e B sono due matrici reali simmetriche 5×5 e $AB = BA$, allora anche AB è una matrice reale simmetrica.

2) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F V b) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F V c) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F V d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di polinomi.

3) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (x, 0)$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto ((x + 2y)^4, (3x - y)^4)$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (x \cdot \sin y, y \cdot \cos x)$.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se S è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ contenente esattamente n vettori, allora S è una base di $\mathbf{V}$.

F V b) L'unione di due sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ è ancora un sistema di generatori di $\mathbf{V}$.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune solo il vettore nullo.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste una matrice invertibile $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = E^{-1}BE$.

F V c) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a 1.

F V d) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente maggiori di 0, allora $\det A > 0$.

F V b) Se T ammette 0 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare nulla.

F V c) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica infinita.

F V d) I polinomi caratteristici di T e $2T$ sono fra loro uguali.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a **S** allora $(x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F V b) Supponiamo che **S** ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = m$.

F V c) Se $\rho(C) = m - 1$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

F V d) Se $m = n$ e $\det A > 0$ allora **S** ammette soluzione.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}$ è multiplo di $\mathbf{u}$, allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.

F V b) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano contemporaneamente i due vettori $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$.

F V c) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se tutti i suoi vettori hanno norma 1.

F V d) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y + z = 1$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare suriettiva, allora $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F V b) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso determinante.

F V c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ (Tr denota l'operatore traccia).

F V d) Tutti gli spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ammette 0 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è la trasformazione lineare nulla.

F V b) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica infinita.

F V c) I polinomi caratteristici di T e $2T$ sono fra loro uguali.

F V d) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente maggiori di 0, allora $\det A > 0$.

2) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (\sin x, \cos y, 0)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x + y + z)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (3z, 2y, x)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (1, 0, 0)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se B è una matrice reale $n \times n$ di rango n, allora è invertibile.

F V b) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare iniettiva, allora $\dim T(\mathbf{U}) = \dim \mathbf{U}$.

F V c) Esistono trasformazioni lineari biunivoche da $\mathbb{R}^{24}[t]$ a $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

F V d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari iniettive, allora $S \circ T$ è una trasformazione lineare iniettiva.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano contemporaneamente i due vettori $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$.

F V b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se tutti i suoi vettori hanno norma 1.

F V c) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y + z = 1$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

F V d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}$ è multiplo di $\mathbf{u}$, allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.

5) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di interi.

F V b) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri complessi.

F V c) Insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri reali.

F V d) Insieme delle successioni di numeri reali rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Una matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

F V b) Moltiplicando una matrice ortogonale per un numero reale non nullo si ottiene una matrice ortogonale.

F V c) Moltiplicando una matrice quadrata reale a traccia nulla per un numero reale si ottiene una matrice a traccia nulla.

F V d) Se $A, I \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ e I è la matrice identica allora $AI = IA$.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V b) Qualunque insieme di 7 vettori distinti di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente.

F V c) Esiste almeno un insieme di 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$ che sia linearmente indipendente.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste una matrice invertibile $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = E^{-1}BE$.

F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se tutte le molteplicità geometriche degli autovalori di A sono uguali a 1.

F V c) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

F V d) Se A è triangolare allora A è diagonalizzabile per similitudine.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se A è una matrice quadrata non invertibile allora $\mathbf{S}$ ammette sempre infinite soluzioni.

F V b) Se il rango di A è strettamente inferiore a n allora $\mathbf{S}$ non può ammettere una e una sola soluzione.

F V c) Se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette una e una sola soluzione.

F V d) Se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora $n = m$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) T non può ammettere $n + 1$ autovalori distinti.

F V b) Se A è simmetrica, allora T ammette almeno un autovalore reale.

F V c) Se A non ammette 0 come autovalore, allora è invertibile.

F V d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso determinante.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La somma di due matrici reali 5×5 invertibili è una matrice invertibile.

F V b) La matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ i cui elementi sono tutti uguali a 1 è una matrice ortogonale.

F V c) Tutte le matrici con determinante uguale a 1 sono ortogonali.

F V d) Se A e B sono due matrici reali simmetriche 5×5 e $AB = BA$, allora anche AB è una matrice reale simmetrica.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune solo il vettore nullo.

F V b) Se S è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ contenente esattamente n vettori, allora S è una base di $\mathbf{V}$.

F V c) L'unione di due sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ è ancora un sistema di generatori di $\mathbf{V}$.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) T ammette sempre almeno una base spettrale.

F V b) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ è il quadrato del polinomio caratteristico di T.

F V c) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F V d) Una base di $\mathbb{R}^n$ è spettrale per T se e solo se è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare suriettiva, allora $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{V}$.

F V b) Tutti gli spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro.

F V c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ (Tr denota l'operatore traccia).

F V d) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso determinante.

6) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (x \cdot \sin y, y \cdot \cos x)$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto ((x + 2y)^4, (3x - y)^4)$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (x, 0)$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A:

F V a) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$ allora $(x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V b) Se $m = n$ e $\det A > 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette soluzione.

F V c) Se $\rho(C) = m - 1$ è sempre possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

F V d) Supponiamo che $\mathbf{S}$ ammetta soluzione. Allora la sua soluzione è unica se e solo se $\rho(A) = m$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3$.

F V b) La matrice di Gram di $(\tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2)$ è la matrice identica 3×3.

F V c) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)$ hanno la stessa orientazione.

F V d) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato da $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

9) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme delle matrici reali 4×4 invertibili, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F V b) $\mathbb{Q}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri razionali.

F V c) $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto righe per colonne.

F V d) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto di polinomi.