Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
F V b) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di divisione.
F V c) $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di trasposizione.
F V d) $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di differenza di polinomi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Il prodotto di due matrici ortogonali 7×7 è una matrice ortogonale.
F V b) La matrice identica $I \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.
F V c) Il prodotto di due matrici reali 7×7 non invertibili è una matrice non invertibile.
F V d) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) $\mathbf{V}$ è finitamente generato.
F V b) Ogni sottoinsieme non vuoto di una qualunque base di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente.
F V c) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.
F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

4) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x, x)$.
F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (0, y, 0)$.
F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (\log(x^2 + 1), \log(y^2 + 1), \log(z^2 + 1))$.
F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -2y, -3z)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi a uno stesso spazio vettoriale, allora sono anche isomorfi tra loro.
F V b) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare tale che $\dim T(\mathbf{V}) = \dim \mathbf{V}$, allora T è suriettiva.
F V c) Se B è una matrice reale di rango n, allora tutti i suoi minori $n \times n$ hanno rango n.
F V d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari suriettive, allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se due sistemi lineari ammettono lo stesso insieme di soluzioni allora coincidono.

F V b) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

F V c) Nessun sistema lineare di 3 equazioni in 5 incognite ammette una e una sola soluzione.

F V d) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite ammette una e una sola soluzione.

7) Sia $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$.

F V a) Può accadere che T ammetta 5 autovalori negativi.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^5$, allora A e B hanno la stessa diagonale principale.

F V c) Può accadere che il polinomio caratteristico di A sia $2t^5$.

F V d) Se A non è simmetrica, allora T non ammette autovalori reali.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se n è pari allora T ammette sempre almeno una base spettrale.

F V b) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare standard) è spettrale per T.

F V c) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di molteplicità algebrica 1, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F V d) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ coincide con il polinomio caratteristico di T.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V c) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ hanno la stessa orientazione.

F V d) La matrice di Gram di $(-\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A.

F V a) Se $\rho(C) = \rho(A)$ non è mai possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

F V b) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora **S** ammette una e una sola soluzione.

F V c) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a **S** allora $(3x_1 - 2x'_1, \dots, 3x_n - 2x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F V d) Se **S** ammette soluzione allora A e C hanno lo stesso rango.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y = 2$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.

F V b) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano i due vettori $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$.

F V c) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

F V d) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se il prodotto scalare fra due vettori qualunque di tale base è uguale a 1.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste un numero reale λ tale che $B = \lambda A$.

F V c) Se A è un multiplo della matrice identica, allora è diagonalizzabile per similitudine.

F V d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a 0.

4) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (x + y, x + 3y + 1)$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (-y, x)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Una matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

F V b) Moltiplicando una matrice ortogonale per -1 si ottiene una matrice ortogonale.

F V c) L'unica matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tale che $A = A^{-1}$ è la matrice identica.

F V d) Sommando fra loro due matrici reali qualunque 4×4 a traccia nulla si ottiene una matrice a traccia nulla.

6) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V b) Insieme dei numeri complessi a parte reale nulla, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V c) Insieme delle successioni costanti di numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

F V d) Insieme $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali positivi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La matrice associata a una qualunque trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è indipendente dalla base scelta in $\mathbf{V}$.

F V b) La matrice del cambiamento di base da una base $\mathcal{B}_1$ a una base $\mathcal{B}_2$ di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ di dimensione finita è sempre invertibile.

F V c) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali esiste sempre una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ che sia suriettiva.

F V d) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$, allora $(2\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = x_1'\mathbf{v}_1 + x_2'\mathbf{v}_2 + x_3'\mathbf{v}_3$ allora $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$ e $x_3 = x_3'$.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

F V d) Esiste un numero infinito di sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ ciascuno contenente esattamente 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Gli autovalori di T sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.

F V b) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è l'identità.

F V c) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente minori di 0, allora $\det A < 0$.

F V d) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica negativa.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

F V b) Il prodotto di due matrici ortogonali 7×7 è una matrice ortogonale.

F V c) La matrice identica $I \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

F V d) Il prodotto di due matrici reali 7×7 non invertibili è una matrice non invertibile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari suriettive, allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

F V b) Se B è una matrice reale di rango n, allora tutti i suoi minori $n \times n$ hanno rango n.

F V c) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare tale che $\dim T(\mathbf{V}) = \dim \mathbf{V}$, allora T è suriettiva.

F V d) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi a uno stesso spazio vettoriale, allora sono anche isomorfi tra loro.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite ammette una e una sola soluzione.

F V b) Nessun sistema lineare di 3 equazioni in 5 incognite ammette una e una sola soluzione.

F V c) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

F V d) Se due sistemi lineari ammettono lo stesso insieme di soluzioni allora coincidono.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica negativa.

F V b) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente minori di 0, allora $\det A < 0$.

F V c) Gli autovalori di T sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.

F V d) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è l'identità.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

F V b) $\mathbf{V}$ è finitamente generato.

F V c) Ogni sottoinsieme non vuoto di una qualunque base di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente.

F V d) Se $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

6) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -2y, -3z)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (\log(x^2 + 1), \log(y^2 + 1), \log(z^2 + 1))$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (0, y, 0)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x, x)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a 0.

F V b) Se A è un multiplo della matrice identica, allora è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

F V d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste un numero reale λ tale che $B = \lambda A$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se il prodotto scalare fra due vettori qualunque di tale base è uguale a 1.

F V b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

F V c) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y = 2$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.

F V d) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano i due vettori $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$.

9) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di differenza di polinomi.

F V b) Insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V c) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di divisione.

F V d) $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di trasposizione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ hanno la stessa orientazione.

F V c) La matrice di Gram di $(-\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

F V d) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F V b) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali esiste sempre una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ che sia suriettiva.

F V c) La matrice del cambiamento di base da una base $\mathcal{B}_1$ a una base $\mathcal{B}_2$ di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ di dimensione finita è sempre invertibile.

F V d) La matrice associata a una qualunque trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è indipendente dalla base scelta in $\mathbf{V}$.

3) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali positivi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V b) Insieme dei numeri complessi a parte reale nulla, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V c) Insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V d) Insieme delle successioni costanti di numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A.

F V a) Se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora A e C hanno lo stesso rango.

F V b) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$ allora $(3x_1 - 2x'_1, \dots, 3x_n - 2x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V c) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora $\mathbf{S}$ ammette una e una sola soluzione.

F V d) Se $\rho(C) = \rho(A)$ non è mai possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare standard) è spettrale per T.

F V b) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di molteplicità algebrica 1, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F V c) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ coincide con il polinomio caratteristico di T.

F V d) Se n è pari allora T ammette sempre almeno una base spettrale.

6) Sia $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^5$, allora A e B hanno la stessa diagonale principale.

F V b) Può accadere che il polinomio caratteristico di A sia $2t^5$.

F V c) Se A non è simmetrica, allora T non ammette autovalori reali.

F V d) Può accadere che T ammetta 5 autovalori negativi.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo dei numeri reali.

F V a) Esiste un numero infinito di sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ ciascuno contenente esattamente 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$.

F V b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = x'_1\mathbf{v}_1 + x'_2\mathbf{v}_2 + x'_3\mathbf{v}_3$ allora $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$ e $x_3 = x'_3$.

F V c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$, allora $(2\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Sommando fra loro due matrici reali qualunque 4×4 a traccia nulla si ottiene una matrice a traccia nulla.

F V b) Moltiplicando una matrice ortogonale per -1 si ottiene una matrice ortogonale.

F V c) Una matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

F V d) L'unica matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tale che $A = A^{-1}$ è la matrice identica.

9) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (-y, x)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (x + y, x + 3y + 1)$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

10 settembre 2012 N. di Matricola: 01001

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Sommando fra loro due matrici reali qualunque 4×4 a traccia nulla si ottiene una matrice a traccia nulla.

F V b) Una matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

F V c) Moltiplicando una matrice ortogonale per -1 si ottiene una matrice ortogonale.

F V d) L'unica matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tale che $A = A^{-1}$ è la matrice identica.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo dei numeri reali.

F V a) Esiste un numero infinito di sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ ciascuno contenente esattamente 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$.

F V b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$, allora $(2\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = x'_1\mathbf{v}_1 + x'_2\mathbf{v}_2 + x'_3\mathbf{v}_3$ allora $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$ e $x_3 = x'_3$.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare standard) è spettrale per T.

F V b) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ coincide con il polinomio caratteristico di T.

F V c) Se n è pari allora T ammette sempre almeno una base spettrale.

F V d) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di molteplicità algebrica 1, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

4) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (0, y, 0)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x, x)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -2y, -3z)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (\log(x^2 + 1), \log(y^2 + 1), \log(z^2 + 1))$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare tale che $\dim T(\mathbf{V}) = \dim \mathbf{V}$, allora T è suriettiva.

F **V** b) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi a uno stesso spazio vettoriale, allora sono anche isomorfi tra loro.

F **V** c) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari suriettive, allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

F **V** d) Se B è una matrice reale di rango n, allora tutti i suoi minori $n \times n$ hanno rango n.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

F **V** b) Se due sistemi lineari ammettono lo stesso insieme di soluzioni allora coincidono.

F **V** c) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite ammette una e una sola soluzione.

F **V** d) Nessun sistema lineare di 3 equazioni in 5 incognite ammette una e una sola soluzione.

7) Sia $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^5$, allora A e B hanno la stessa diagonale principale.

F **V** b) Se A non è simmetrica, allora T non ammette autovalori reali.

F **V** c) Può accadere che T ammetta 5 autovalori negativi.

F **V** d) Può accadere che il polinomio caratteristico di A sia $2t^5$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** b) La matrice di Gram di $(-\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

F **V** c) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** d) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ hanno la stessa orientazione.

9) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F **V** a) Insieme $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali positivi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F **V** b) Insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F **V** c) Insieme dei numeri complessi a parte reale nulla, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F **V** d) Insieme delle successioni costanti di numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente minori di 0, allora $\det A < 0$.

F V b) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica negativa.

F V c) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è l'identità.

F V d) Gli autovalori di T sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A.

F V a) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora **S** ammette una e una sola soluzione.

F V b) Se $\rho(C) = \rho(A)$ non è mai possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

F V c) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a **S** allora $(3x_1 - 2x'_1, \dots, 3x_n - 2x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F V d) Se **S** ammette soluzione allora A e C hanno lo stesso rango.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La matrice identica $I \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

F V b) Il prodotto di due matrici reali 7×7 non invertibili è una matrice non invertibile.

F V c) Il prodotto di due matrici ortogonali 7×7 è una matrice ortogonale.

F V d) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

4) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di divisione.

F V b) $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di trasposizione.

F V c) Insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V d) $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di differenza di polinomi.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se A è un multiplo della matrice identica, allora è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a 0.

F **V** c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste un numero reale λ tale che $B = \lambda A$.

F **V** d) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

F **V** b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se il prodotto scalare fra due vettori qualunque di tale base è uguale a 1.

F **V** c) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano i due vettori $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$.

F **V** d) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y = 2$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.

7) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y) \mapsto (x + y, x + 3y + 1)$.

F **V** b) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

F **V** c) $T : (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.

F **V** d) $T : (x, y) \mapsto (-y, x)$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Ogni sottoinsieme non vuoto di una qualunque base di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente.

F **V** b) Se $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F **V** c) $\mathbf{V}$ è finitamente generato.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) La matrice del cambiamento di base da una base $\mathcal{B}_1$ a una base $\mathcal{B}_2$ di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ di dimensione finita è sempre invertibile.

F **V** b) La matrice associata a una qualunque trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è indipendente dalla base scelta in $\mathbf{V}$.

F **V** c) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali esiste sempre una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ che sia suriettiva.

F **V** d) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Moltiplicando una matrice ortogonale per -1 si ottiene una matrice ortogonale.

F V b) L'unica matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tale che $A = A^{-1}$ è la matrice identica.

F V c) Sommando fra loro due matrici reali qualunque 4×4 a traccia nulla si ottiene una matrice a traccia nulla.

F V d) Una matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = x'_1\mathbf{v}_1 + x'_2\mathbf{v}_2 + x'_3\mathbf{v}_3$ allora $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$ e $x_3 = x'_3$.

F V b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

F V c) Esiste un numero infinito di sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ ciascuno contenente esattamente 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$.

F V d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$, allora $(2\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

3) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (0, y, 0)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (\log(x^2 + 1), \log(y^2 + 1), \log(z^2 + 1))$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x, x)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -2y, -3z)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare tale che $\dim T(\mathbf{V}) = \dim \mathbf{V}$, allora T è suriettiva.

F V b) Se B è una matrice reale di rango n, allora tutti i suoi minori $n \times n$ hanno rango n.

F V c) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi a uno stesso spazio vettoriale, allora sono anche isomorfi tra loro.

F V d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari suriettive, allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se il prodotto scalare fra due vettori qualunque di tale base è uguale a 1.

F V b) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y = 2$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.

F V c) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano i due vettori $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$.

F V d) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

6) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme dei numeri complessi a parte reale nulla, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V b) Insieme delle successioni costanti di numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

F V c) Insieme $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali positivi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V d) Insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

F V b) Nessun sistema lineare di 3 equazioni in 5 incognite ammette una e una sola soluzione.

F V c) Se due sistemi lineari ammettono lo stesso insieme di soluzioni allora coincidono.

F V d) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite ammette una e una sola soluzione.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica negativa.

F V b) Gli autovalori di T sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.

F V c) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è l'identità.

F V d) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente minori di 0, allora $\det A < 0$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a 0.

F V b) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

F V c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste un numero reale λ tale che $B = \lambda A$.

F V d) Se A è un multiplo della matrice identica, allora è diagonalizzabile per similitudine.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La matrice associata a una qualunque trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è indipendente dalla base scelta in $\mathbf{V}$.

F V b) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali esiste sempre una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ che sia suriettiva.

F V c) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F V d) La matrice del cambiamento di base da una base $\mathcal{B}_1$ a una base $\mathcal{B}_2$ di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ di dimensione finita è sempre invertibile.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di molteplicità algebrica 1, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F V b) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare standard) è spettrale per T.

F V c) Se n è pari allora T ammette sempre almeno una base spettrale.

F V d) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ coincide con il polinomio caratteristico di T.

3) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V b) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di divisione.

F V c) $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di differenza di polinomi.

F V d) $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di trasposizione.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ hanno la stessa orientazione.

F V b) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V c) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V d) La matrice di Gram di $(-\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) $\mathbf{V}$ è finitamente generato.

F V b) Ogni sottoinsieme non vuoto di una qualunque base di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

F V d) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Il prodotto di due matrici ortogonali 7×7 è una matrice ortogonale.

F V b) La matrice identica $I \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

F V c) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

F V d) Il prodotto di due matrici reali 7×7 non invertibili è una matrice non invertibile.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A.

F V a) Se $\rho(C) = \rho(A)$ non è mai possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

F V b) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$ allora $(3x_1 - 2x'_1, \dots, 3x_n - 2x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V c) Se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora A e C hanno lo stesso rango.

F V d) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora $\mathbf{S}$ ammette una e una sola soluzione.

8) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (-y, x)$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (x + y, x + 3y + 1)$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$.

F V a) Può accadere che il polinomio caratteristico di A sia $2t^5$.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^5$, allora A e B hanno la stessa diagonale principale.

F V c) Può accadere che T ammetta 5 autovalori negativi.

F V d) Se A non è simmetrica, allora T non ammette autovalori reali.

10 settembre 2012 N. di Matricola: 01101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Ogni sottoinsieme non vuoto di una qualunque base di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente.

F V b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

F V c) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V d) $\mathbf{V}$ è finitamente generato.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare standard) è spettrale per T.

F V b) Se n è pari allora T ammette sempre almeno una base spettrale.

F V c) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di molteplicità algebrica 1, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F V d) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ coincide con il polinomio caratteristico di T.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V c) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ hanno la stessa orientazione.

F V d) La matrice di Gram di $(-\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

4) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -2y, -3z)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (\log(x^2 + 1), \log(y^2 + 1), \log(z^2 + 1))$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x, x)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (0, y, 0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari suriettive, allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

F V b) Se B è una matrice reale di rango n, allora tutti i suoi minori $n \times n$ hanno rango n.

F V c) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi a uno stesso spazio vettoriale, allora sono anche isomorfi tra loro.

F V d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare tale che $\dim T(\mathbf{V}) = \dim \mathbf{V}$, allora T è suriettiva.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite ammette una e una sola soluzione.

F V b) Nessun sistema lineare di 3 equazioni in 5 incognite ammette una e una sola soluzione.

F V c) Se due sistemi lineari ammettono lo stesso insieme di soluzioni allora coincidono.

F V d) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

7) Sia $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^5$, allora A e B hanno la stessa diagonale principale.

F V b) Può accadere che T ammetta 5 autovalori negativi.

F V c) Può accadere che il polinomio caratteristico di A sia $2t^5$.

F V d) Se A non è simmetrica, allora T non ammette autovalori reali.

8) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di divisione.

F V b) $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di differenza di polinomi.

F V c) $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di trasposizione.

F V d) Insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La matrice identica $I \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

F V b) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

F V c) Il prodotto di due matrici reali 7×7 non invertibili è una matrice non invertibile.

F V d) Il prodotto di due matrici ortogonali 7×7 è una matrice ortogonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è un multiplo della matrice identica, allora è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste un numero reale λ tale che $B = \lambda A$.

F V c) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

F V d) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a 0.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente minori di 0, allora $\det A < 0$.

F V b) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è l'identità.

F V c) Gli autovalori di T sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.

F V d) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica negativa.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) L'unica matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tale che $A = A^{-1}$ è la matrice identica.

F V b) Una matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

F V c) Moltiplicando una matrice ortogonale per -1 si ottiene una matrice ortogonale.

F V d) Sommando fra loro due matrici reali qualunque 4×4 a traccia nulla si ottiene una matrice a traccia nulla.

4) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme delle successioni costanti di numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

F V b) Insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V c) Insieme dei numeri complessi a parte reale nulla, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V d) Insieme $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali positivi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

F V b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$, allora $(2\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = x'_1\mathbf{v}_1 + x'_2\mathbf{v}_2 + x'_3\mathbf{v}_3$ allora $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$ e $x_3 = x'_3$.

F V d) Esiste un numero infinito di sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ ciascuno contenente esattamente 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A.

F V a) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora $\mathbf{S}$ ammette una e una sola soluzione.

F V b) Se $\rho(C) = \rho(A)$ non è mai possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

F V c) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$ allora $(3x_1 - 2x'_1, \dots, 3x_n - 2x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V d) Se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora A e C hanno lo stesso rango.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La matrice del cambiamento di base da una base $\mathcal{B}_1$ a una base $\mathcal{B}_2$ di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ di dimensione finita è sempre invertibile.

F V b) La matrice associata a una qualunque trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è indipendente dalla base scelta in $\mathbf{V}$.

F V c) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali esiste sempre una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ che sia suriettiva.

F V d) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

8) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (x + y, x + 3y + 1)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (-y, x)$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

F V b) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano i due vettori $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$.

F V c) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y = 2$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.

F V d) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se il prodotto scalare fra due vettori qualunque di tale base è uguale a 1.

10 settembre 2012 N. di Matricola: 01111

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -2y, -3z)$.

F **V** b) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x, x)$.

F **V** c) $T : (x, y, z) \mapsto (0, y, 0)$.

F **V** d) $T : (x, y, z) \mapsto (\log(x^2 + 1), \log(y^2 + 1), \log(z^2 + 1))$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite ammette una e una sola soluzione.

F **V** b) Se due sistemi lineari ammettono lo stesso insieme di soluzioni allora coincidono.

F **V** c) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

F **V** d) Nessun sistema lineare di 3 equazioni in 5 incognite ammette una e una sola soluzione.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica negativa.

F **V** b) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente minori di 0, allora $\det A < 0$.

F **V** c) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è l'identità.

F **V** d) Gli autovalori di T sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari suriettive, allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

F **V** b) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi a uno stesso spazio vettoriale, allora sono anche isomorfi tra loro.

F **V** c) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare tale che $\dim T(\mathbf{V}) = \dim \mathbf{V}$, allora T è suriettiva.

F **V** d) Se B è una matrice reale di rango n, allora tutti i suoi minori $n \times n$ hanno rango n.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a 0.

F V b) Se A è un multiplo della matrice identica, allora è diagonalizzabile per similitudine.

F V c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste un numero reale λ tale che $B = \lambda A$.

F V d) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se il prodotto scalare fra due vettori qualunque di tale base è uguale a 1.

F V b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

F V c) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano i due vettori $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$.

F V d) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y = 2$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.

7) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di differenza di polinomi.

F V b) $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di trasposizione.

F V c) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di divisione.

F V d) Insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

F V b) Il prodotto di due matrici reali 7×7 non invertibili è una matrice non invertibile.

F V c) La matrice identica $I \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

F V d) Il prodotto di due matrici ortogonali 7×7 è una matrice ortogonale.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

F V b) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V c) Ogni sottoinsieme non vuoto di una qualunque base di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente.

F V d) $\mathbf{V}$ è finitamente generato.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Moltiplicando una matrice ortogonale per -1 si ottiene una matrice ortogonale.

F V b) L'unica matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tale che $A = A^{-1}$ è la matrice identica.

F V c) Una matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

F V d) Sommando fra loro due matrici reali qualunque 4×4 a traccia nulla si ottiene una matrice a traccia nulla.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A.

F V a) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora **S** ammette una e una sola soluzione.

F V b) Se $\rho(C) = \rho(A)$ non è mai possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

F V c) Se **S** ammette soluzione allora A e C hanno lo stesso rango.

F V d) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a **S** allora $(3x_1 - 2x'_1, \dots, 3x_n - 2x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

3) Sia $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^5$, allora A e B hanno la stessa diagonale principale.

F V b) Può accadere che T ammetta 5 autovalori negativi.

F V c) Se A non è simmetrica, allora T non ammette autovalori reali.

F V d) Può accadere che il polinomio caratteristico di A sia $2t^5$.

4) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di **V** e $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = x'_1\mathbf{v}_1 + x'_2\mathbf{v}_2 + x'_3\mathbf{v}_3$ allora $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$ e $x_3 = x'_3$.

F V b) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

F V c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di **V**, allora $(2\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di **V**.

F V d) Esiste un numero infinito di sottoinsiemi linearmente indipendenti di **V** ciascuno contenente esattamente 3 vettori distinti di **V**.

5) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme dei numeri complessi a parte reale nulla, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V b) Insieme delle successioni costanti di numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

F V c) Insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V d) Insieme $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali positivi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare standard) è spettrale per T.

F V b) Se n è pari allora T ammette sempre almeno una base spettrale.

F V c) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ coincide con il polinomio caratteristico di T.

F V d) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di molteplicità algebrica 1, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La matrice del cambiamento di base da una base $\mathcal{B}_1$ a una base $\mathcal{B}_2$ di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ di dimensione finita è sempre invertibile.

F V b) La matrice associata a una qualunque trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è indipendente dalla base scelta in $\mathbf{V}$.

F V c) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F V d) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali esiste sempre una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ che sia suriettiva.

8) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (x + y, x + 3y + 1)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (-y, x)$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V c) La matrice di Gram di $(-\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

F V d) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ hanno la stessa orientazione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$, allora $(2\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V b) Esiste un numero infinito di sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ ciascuno contenente esattamente 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$.

F V c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = x_1'\mathbf{v}_1 + x_2'\mathbf{v}_2 + x_3'\mathbf{v}_3$ allora $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$ e $x_3 = x_3'$.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

2) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (\log(x^2 + 1), \log(y^2 + 1), \log(z^2 + 1))$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -2y, -3z)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (0, y, 0)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x, x)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se B è una matrice reale di rango n, allora tutti i suoi minori $n \times n$ hanno rango n.

F V b) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari suriettive, allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

F V c) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare tale che $\dim T(\mathbf{V}) = \dim \mathbf{V}$, allora T è suriettiva.

F V d) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi a uno stesso spazio vettoriale, allora sono anche isomorfi tra loro.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Nessun sistema lineare di 3 equazioni in 5 incognite ammette una e una sola soluzione.

F V b) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite ammette una e una sola soluzione.

F V c) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

F V d) Se due sistemi lineari ammettono lo stesso insieme di soluzioni allora coincidono.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Una matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

F V b) Sommando fra loro due matrici reali qualunque 4×4 a traccia nulla si ottiene una matrice a traccia nulla.

F V c) Moltiplicando una matrice ortogonale per -1 si ottiene una matrice ortogonale.

F V d) L'unica matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tale che $A = A^{-1}$ è la matrice identica.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di molteplicità algebrica 1, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F **V** b) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare standard) è spettrale per T.

F **V** c) Se n è pari allora T ammette sempre almeno una base spettrale.

F **V** d) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ coincide con il polinomio caratteristico di T.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ hanno la stessa orientazione.

F **V** b) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** c) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** d) La matrice di Gram di $(-\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

8) Sia $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$.

F **V** a) Può accadere che il polinomio caratteristico di A sia $2t^5$.

F **V** b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^5$, allora A e B hanno la stessa diagonale principale.

F **V** c) Può accadere che T ammetta 5 autovalori negativi.

F **V** d) Se A non è simmetrica, allora T non ammette autovalori reali.

9) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F **V** a) Insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F **V** b) Insieme $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali positivi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F **V** c) Insieme dei numeri complessi a parte reale nulla, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F **V** d) Insieme delle successioni costanti di numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a 0.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste un numero reale λ tale che $B = \lambda A$.

F V c) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

F V d) Se A è un multiplo della matrice identica, allora è diagonalizzabile per similitudine.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica negativa.

F V b) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è l'identità.

F V c) Gli autovalori di T sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.

F V d) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente minori di 0, allora $\det A < 0$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Il prodotto di due matrici reali 7×7 non invertibili è una matrice non invertibile.

F V b) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

F V c) La matrice identica $I \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

F V d) Il prodotto di due matrici ortogonali 7×7 è una matrice ortogonale.

4) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di trasposizione.

F V b) $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di differenza di polinomi.

F V c) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di divisione.

F V d) Insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

5) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (-y, x)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (x + y, x + 3y + 1)$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

F V c) Ogni sottoinsieme non vuoto di una qualunque base di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente.

F V d) $\mathbf{V}$ è finitamente generato.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se il prodotto scalare fra due vettori qualunque di tale base è uguale a 1.

F V b) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano i due vettori $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$.

F V c) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y = 2$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.

F V d) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F V b) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali esiste sempre una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ che sia suriettiva.

F V c) La matrice del cambiamento di base da una base $\mathcal{B}_1$ a una base $\mathcal{B}_2$ di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ di dimensione finita è sempre invertibile.

F V d) La matrice associata a una qualunque trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è indipendente dalla base scelta in $\mathbf{V}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A.

F V a) Se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora A e C hanno lo stesso rango.

F V b) Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$ allora $(3x_1 - 2x'_1, \ldots, 3x_n - 2x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V c) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora $\mathbf{S}$ ammette una e una sola soluzione.

F V d) Se $\rho(C) = \rho(A)$ non è mai possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (0, y, 0)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (\log(x^2 + 1), \log(y^2 + 1), \log(z^2 + 1))$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -2y, -3z)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x, x)$.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente minori di 0, allora $\det A < 0$.

F V b) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica negativa.

F V c) Gli autovalori di T sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.

F V d) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è l'identità.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare tale che $\dim T(\mathbf{V}) = \dim \mathbf{V}$, allora T è suriettiva.

F V b) Se B è una matrice reale di rango n, allora tutti i suoi minori $n \times n$ hanno rango n.

F V c) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari suriettive, allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

F V d) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi a uno stesso spazio vettoriale, allora sono anche isomorfi tra loro.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è un multiplo della matrice identica, allora è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a 0.

F V c) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

F V d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste un numero reale λ tale che $B = \lambda A$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

F V b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se il prodotto scalare fra due vettori qualunque di tale base è uguale a 1.

F V c) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y = 2$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.

F V d) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano i due vettori $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

F V b) Nessun sistema lineare di 3 equazioni in 5 incognite ammette una e una sola soluzione.

F V c) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite ammette una e una sola soluzione.

F V d) Se due sistemi lineari ammettono lo stesso insieme di soluzioni allora coincidono.

7) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali positivi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V b) Insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V c) Insieme delle successioni costanti di numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

F V d) Insieme dei numeri complessi a parte reale nulla, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Sommando fra loro due matrici reali qualunque 4×4 a traccia nulla si ottiene una matrice a traccia nulla.

F V b) Una matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

F V c) L'unica matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tale che $A = A^{-1}$ è la matrice identica.

F V d) Moltiplicando una matrice ortogonale per -1 si ottiene una matrice ortogonale.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo dei numeri reali.

F V a) Esiste un numero infinito di sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ ciascuno contenente esattamente 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$.

F V b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$, allora $(2\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

F V d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = x'_1\mathbf{v}_1 + x'_2\mathbf{v}_2 + x'_3\mathbf{v}_3$ allora $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$ e $x_3 = x'_3$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F **V** a) $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di differenza di polinomi.

F **V** b) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di divisione.

F **V** c) Insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F **V** d) $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di trasposizione.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A.

F **V** a) Se **S** ammette soluzione allora A e C hanno lo stesso rango.

F **V** b) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora **S** ammette una e una sola soluzione.

F **V** c) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a **S** allora $(3x_1 - 2x'_1, \dots, 3x_n - 2x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F **V** d) Se $\rho(C) = \rho(A)$ non è mai possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

3) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di **V** e ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

F **V** b) Ogni sottoinsieme non vuoto di una qualunque base di **V** è linearmente indipendente.

F **V** c) **V** è finitamente generato.

F **V** d) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ sono due basi ordinate di **V**, allora $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n)$ è una base ordinata di **V**.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

F **V** b) La matrice identica $I \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

F **V** c) Il prodotto di due matrici ortogonali 7×7 è una matrice ortogonale.

F **V** d) Il prodotto di due matrici reali 7×7 non invertibili è una matrice non invertibile.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F **V** b) La matrice del cambiamento di base da una base $\mathcal{B}_1$ a una base $\mathcal{B}_2$ di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ di dimensione finita è sempre invertibile.

F **V** c) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali esiste sempre una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ che sia suriettiva.

F **V** d) La matrice associata a una qualunque trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è indipendente dalla base scelta in $\mathbf{V}$.

6) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y) \mapsto (-y, x)$.

F **V** b) $T : (x, y) \mapsto (x + y, x + 3y + 1)$.

F **V** c) $T : (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.

F **V** d) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$.

F **V** a) Se A non è simmetrica, allora T non ammette autovalori reali.

F **V** b) Può accadere che il polinomio caratteristico di A sia $2t^5$.

F **V** c) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^5$, allora A e B hanno la stessa diagonale principale.

F **V** d) Può accadere che T ammetta 5 autovalori negativi.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F **V** a) La matrice di Gram di $(-\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

F **V** b) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ hanno la stessa orientazione.

F **V** c) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F **V** d) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ coincide con il polinomio caratteristico di T.

F **V** b) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di molteplicità algebrica 1, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F **V** c) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare standard) è spettrale per T.

F **V** d) Se n è pari allora T ammette sempre almeno una base spettrale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare standard) è spettrale per T.

F V b) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di molteplicità algebrica 1, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F V c) Se n è pari allora T ammette sempre almeno una base spettrale.

F V d) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ coincide con il polinomio caratteristico di T.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ hanno la stessa orientazione.

F V c) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V d) La matrice di Gram di $(-\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Ogni sottoinsieme non vuoto di una qualunque base di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente.

F V b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

F V c) Se $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V d) $\mathbf{V}$ è finitamente generato.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se due sistemi lineari ammettono lo stesso insieme di soluzioni allora coincidono.

F V b) Nessun sistema lineare di 3 equazioni in 5 incognite ammette una e una sola soluzione.

F V c) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

F V d) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite ammette una e una sola soluzione.

5) Sia $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^5$, allora A e B hanno la stessa diagonale principale.

F V b) Può accadere che il polinomio caratteristico di A sia $2t^5$.

F V c) Può accadere che T ammetta 5 autovalori negativi.

F V d) Se A non è simmetrica, allora T non ammette autovalori reali.

6) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di divisione.

F V b) $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di differenza di polinomi.

F V c) $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di trasposizione.

F V d) Insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La matrice identica $I \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

F V b) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

F V c) Il prodotto di due matrici reali 7×7 non invertibili è una matrice non invertibile.

F V d) Il prodotto di due matrici ortogonali 7×7 è una matrice ortogonale.

8) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x, x)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (\log(x^2 + 1), \log(y^2 + 1), \log(z^2 + 1))$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (0, y, 0)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -2y, -3z)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi a uno stesso spazio vettoriale, allora sono anche isomorfi tra loro.

F V b) Se B è una matrice reale di rango n, allora tutti i suoi minori $n \times n$ hanno rango n.

F V c) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare tale che $\dim T(\mathbf{V}) = \dim \mathbf{V}$, allora T è suriettiva.

F V d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari suriettive, allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.
F V b) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.
F V c) $T : (x, y) \mapsto (-y, x)$.
F V d) $T : (x, y) \mapsto (x + y, x + 3y + 1)$.

2) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
F V b) Insieme $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali positivi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
F V c) Insieme delle successioni costanti di numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.
F V d) Insieme dei numeri complessi a parte reale nulla, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A.

F V a) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a **S** allora $(3x_1 - 2x'_1, \dots, 3x_n - 2x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.
F V b) Se $\rho(C) = \rho(A)$ non è mai possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.
F V c) Se **S** ammette soluzione allora A e C hanno lo stesso rango.
F V d) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora **S** ammette una e una sola soluzione.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano i due vettori $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$.
F V b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se il prodotto scalare fra due vettori qualunque di tale base è uguale a 1.
F V c) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.
F V d) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y = 2$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$, allora $(2\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V b) Esiste un numero infinito di sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ ciascuno contenente esattamente 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$.

F V c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

F V d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = x_1'\mathbf{v}_1 + x_2'\mathbf{v}_2 + x_3'\mathbf{v}_3$ allora $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$ e $x_3 = x_3'$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Una matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

F V b) Sommando fra loro due matrici reali qualunque 4×4 a traccia nulla si ottiene una matrice a traccia nulla.

F V c) L'unica matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tale che $A = A^{-1}$ è la matrice identica.

F V d) Moltiplicando una matrice ortogonale per -1 si ottiene una matrice ortogonale.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è l'identità.

F V b) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica negativa.

F V c) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente minori di 0, allora $\det A < 0$.

F V d) Gli autovalori di T sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali esiste sempre una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ che sia suriettiva.

F V b) La matrice associata a una qualunque trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è indipendente dalla base scelta in $\mathbf{V}$.

F V c) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F V d) La matrice del cambiamento di base da una base $\mathcal{B}_1$ a una base $\mathcal{B}_2$ di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ di dimensione finita è sempre invertibile.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste un numero reale λ tale che $B = \lambda A$.

F V b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a 0.

F V c) Se A è un multiplo della matrice identica, allora è diagonalizzabile per similitudine.

F V d) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F **V** a) $T : (x, y, z) \mapsto (0, y, 0)$.

F **V** b) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x, x)$.

F **V** c) $T : (x, y, z) \mapsto (\log(x^2 + 1), \log(y^2 + 1), \log(z^2 + 1))$.

F **V** d) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -2y, -3z)$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare tale che $\dim T(\mathbf{V}) = \dim \mathbf{V}$, allora T è suriettiva.

F **V** b) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi a uno stesso spazio vettoriale, allora sono anche isomorfi tra loro.

F **V** c) Se B è una matrice reale di rango n, allora tutti i suoi minori $n \times n$ hanno rango n.

F **V** d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari suriettive, allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a 0.

F **V** b) Se A è un multiplo della matrice identica, allora è diagonalizzabile per similitudine.

F **V** c) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

F **V** d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste un numero reale λ tale che $B = \lambda A$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se il prodotto scalare fra due vettori qualunque di tale base è uguale a 1.

F **V** b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

F **V** c) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y = 2$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.

F **V** d) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano i due vettori $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

F V b) Se due sistemi lineari ammettono lo stesso insieme di soluzioni allora coincidono.

F V c) Nessun sistema lineare di 3 equazioni in 5 incognite ammette una e una sola soluzione.

F V d) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite ammette una e una sola soluzione.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica negativa.

F V b) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente minori di 0, allora $\det A < 0$.

F V c) Gli autovalori di T sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.

F V d) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è l'identità.

7) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di differenza di polinomi.

F V b) $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di trasposizione.

F V c) Insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V d) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di divisione.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

F V b) Il prodotto di due matrici reali 7×7 non invertibili è una matrice non invertibile.

F V c) Il prodotto di due matrici ortogonali 7×7 è una matrice ortogonale.

F V d) La matrice identica $I \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e ${}^\perp\mathbf{W} \subseteq {}^\perp\mathbf{U}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

F V b) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V c) $\mathbf{V}$ è finitamente generato.

F V d) Ogni sottoinsieme non vuoto di una qualunque base di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) L'unica matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tale che $A = A^{-1}$ è la matrice identica.

F V b) Sommando fra loro due matrici reali qualunque 4×4 a traccia nulla si ottiene una matrice a traccia nulla.

F V c) Moltiplicando una matrice ortogonale per -1 si ottiene una matrice ortogonale.

F V d) Una matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

2) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme delle successioni costanti di numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

F V b) Insieme $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali positivi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V c) Insieme dei numeri complessi a parte reale nulla, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V d) Insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

F V b) Esiste un numero infinito di sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ ciascuno contenente esattamente 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$.

F V c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = x'_1\mathbf{v}_1 + x'_2\mathbf{v}_2 + x'_3\mathbf{v}_3$ allora $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$ e $x_3 = x'_3$.

F V d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$, allora $(2\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

4) Sia $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^5$, allora A e B hanno la stessa diagonale principale.

F V b) Può accadere che T ammetta 5 autovalori negativi.

F V c) Può accadere che il polinomio caratteristico di A sia $2t^5$.

F V d) Se A non è simmetrica, allora T non ammette autovalori reali.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F V b) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali esiste sempre una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ che sia suriettiva.

F V c) La matrice del cambiamento di base da una base $\mathcal{B}_1$ a una base $\mathcal{B}_2$ di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ di dimensione finita è sempre invertibile.

F V d) La matrice associata a una qualunque trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è indipendente dalla base scelta in $\mathbf{V}$.

6) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (-y, x)$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (x + y, x + 3y + 1)$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare standard) è spettrale per T.

F V b) Se n è pari allora T ammette sempre almeno una base spettrale.

F V c) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di molteplicità algebrica 1, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F V d) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ coincide con il polinomio caratteristico di T.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V c) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ hanno la stessa orientazione.

F V d) La matrice di Gram di $(-\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A.

F V a) Se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora A e C hanno lo stesso rango.

F V b) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$ allora $(3x_1 - 2x'_1, \dots, 3x_n - 2x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V c) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora $\mathbf{S}$ ammette una e una sola soluzione.

F V d) Se $\rho(C) = \rho(A)$ non è mai possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare tale che $\dim T(\mathbf{V}) = \dim \mathbf{V}$, allora T è suriettiva.

F V b) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi a uno stesso spazio vettoriale, allora sono anche isomorfi tra loro.

F V c) Se B è una matrice reale di rango n, allora tutti i suoi minori $n \times n$ hanno rango n.

F V d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari suriettive, allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

F V b) Se due sistemi lineari ammettono lo stesso insieme di soluzioni allora coincidono.

F V c) Nessun sistema lineare di 3 equazioni in 5 incognite ammette una e una sola soluzione.

F V d) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite ammette una e una sola soluzione.

3) Sia $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$.

F V a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^5$, allora A e B hanno la stessa diagonale principale.

F V b) Può accadere che il polinomio caratteristico di A sia $2t^5$.

F V c) Se A non è simmetrica, allora T non ammette autovalori reali.

F V d) Può accadere che T ammetta 5 autovalori negativi.

4) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme dei numeri complessi a parte reale nulla, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V b) Insieme delle successioni costanti di numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

F V c) Insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V d) Insieme $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali positivi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare standard) è spettrale per T.

F V b) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di molteplicità algebrica 1, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F V c) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ coincide con il polinomio caratteristico di T.

F V d) Se n è pari allora T ammette sempre almeno una base spettrale.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ hanno la stessa orientazione.

F V c) La matrice di Gram di $(-\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

F V d) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Moltiplicando una matrice ortogonale per -1 si ottiene una matrice ortogonale.

F V b) L'unica matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tale che $A = A^{-1}$ è la matrice identica.

F V c) Una matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

F V d) Sommando fra loro due matrici reali qualunque 4×4 a traccia nulla si ottiene una matrice a traccia nulla.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo dei numeri reali.

F V a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = x'_1\mathbf{v}_1 + x'_2\mathbf{v}_2 + x'_3\mathbf{v}_3$ allora $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$ e $x_3 = x'_3$.

F V b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

F V c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$, allora $(2\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V d) Esiste un numero infinito di sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ ciascuno contenente esattamente 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$.

9) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (0, y, 0)$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x, x)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (\log(x^2 + 1), \log(y^2 + 1), \log(z^2 + 1))$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -2y, -3z)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) La matrice identica $I \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

F V b) Il prodotto di due matrici ortogonali 7×7 è una matrice ortogonale.

F V c) Il prodotto di due matrici reali 7×7 non invertibili è una matrice non invertibile.

F V d) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

2) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di divisione.

F V b) Insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V c) $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di trasposizione.

F V d) $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di differenza di polinomi.

3) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (-y, x)$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (x + y, x + 3y + 1)$.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F V a) Ogni sottoinsieme non vuoto di una qualunque base di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente.

F V b) $\mathbf{V}$ è finitamente generato.

F V c) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F V d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se A è un multiplo della matrice identica, allora è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste un numero reale λ tale che $B = \lambda A$.

F V c) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a 0.

F V d) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente minori di 0, allora $\det A < 0$.

F **V** b) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è l'identità.

F **V** c) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica negativa.

F **V** d) Gli autovalori di T sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare **S** di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A.

F **V** a) Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a **S** allora $(3x_1 - 2x'_1, \ldots, 3x_n - 2x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

F **V** b) Se **S** ammette soluzione allora A e C hanno lo stesso rango.

F **V** c) Se $\rho(C) = \rho(A)$ non è mai possibile eliminare una equazione dal sistema lineare **S** senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

F **V** d) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora **S** ammette una e una sola soluzione.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F **V** a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

F **V** b) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano i due vettori $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$.

F **V** c) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se il prodotto scalare fra due vettori qualunque di tale base è uguale a 1.

F **V** d) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y = 2$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali esiste sempre una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ che sia suriettiva.

F **V** b) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

F **V** c) La matrice associata a una qualunque trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è indipendente dalla base scelta in $\mathbf{V}$.

F **V** d) La matrice del cambiamento di base da una base $\mathcal{B}_1$ a una base $\mathcal{B}_2$ di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ di dimensione finita è sempre invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F V a) Se T ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n allora T è l'identità.

F V b) Può accadere che T ammetta un autovalore di molteplicità geometrica negativa.

F V c) Gli autovalori di T sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.

F V d) Se T ammette n autovalori distinti e tutti strettamente minori di 0, allora $\det A < 0$.

2) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y, z) \mapsto (\log(x^2 + 1), \log(y^2 + 1), \log(z^2 + 1))$.

F V b) $T : (x, y, z) \mapsto (0, y, 0)$.

F V c) $T : (x, y, z) \mapsto (x, x, x)$.

F V d) $T : (x, y, z) \mapsto (-x, -2y, -3z)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se B è una matrice reale di rango n, allora tutti i suoi minori $n \times n$ hanno rango n.

F V b) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare tale che $\dim T(\mathbf{V}) = \dim \mathbf{V}$, allora T è suriettiva.

F V c) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi a uno stesso spazio vettoriale, allora sono anche isomorfi tra loro.

F V d) Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono due trasformazioni lineari suriettive, allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

F V a) Non esistono basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$ che contengano i due vettori $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$.

F V b) Una base di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale se e solo se il prodotto scalare fra due vettori qualunque di tale base è uguale a 1.

F V c) I due piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y = 2$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.

F V d) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, allora $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

5) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F **V** a) Insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F **V** b) Insieme dei numeri complessi a parte reale nulla, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F **V** c) Insieme $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali positivi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F **V** d) Insieme delle successioni costanti di numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto termine a termine di successioni.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Una matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

F **V** b) Moltiplicando una matrice ortogonale per -1 si ottiene una matrice ortogonale.

F **V** c) Sommando fra loro due matrici reali qualunque 4×4 a traccia nulla si ottiene una matrice a traccia nulla.

F **V** d) L'unica matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tale che $A = A^{-1}$ è la matrice identica.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$, allora $(2\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F **V** b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = x'_1\mathbf{v}_1 + x'_2\mathbf{v}_2 + x'_3\mathbf{v}_3$ allora $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$ e $x_3 = x'_3$.

F **V** c) Esiste un numero infinito di sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$ ciascuno contenente esattamente 3 vettori distinti di $\mathbf{V}$.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ allora esiste un numero reale λ tale che $B = \lambda A$.

F **V** b) A è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è uguale a 0.

F **V** c) Se $n = 4$ e T è definito dall'uguaglianza $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$, allora T ammette almeno una base spettrale.

F **V** d) Se A è un multiplo della matrice identica, allora è diagonalizzabile per similitudine.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Nessun sistema lineare di 3 equazioni in 5 incognite ammette una e una sola soluzione.

F **V** b) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

F **V** c) Se due sistemi lineari ammettono lo stesso insieme di soluzioni allora coincidono.

F **V** d) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite ammette una e una sola soluzione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$.

F **V** a) Può accadere che T ammetta 5 autovalori negativi.

F **V** b) Se A non è simmetrica, allora T non ammette autovalori reali.

F **V** c) Può accadere che il polinomio caratteristico di A sia $2t^5$.

F **V** d) Se B è una matrice associata a T rispetto a una base di $\mathbb{R}^5$, allora A e B hanno la stessa diagonale principale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F **V** a) Il prodotto di due matrici reali 7×7 non invertibili è una matrice non invertibile.

F **V** b) La matrice identica $I \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

F **V** c) Il prodotto di due matrici ortogonali 7×7 è una matrice ortogonale.

F **V** d) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo dei numeri reali.

F **V** a) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$, allora $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

F **V** b) Ogni sottoinsieme non vuoto di una qualunque base di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente.

F **V** c) $\mathbf{V}$ è finitamente generato.

F **V** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ e ${}^{\perp}\mathbf{W} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{U}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

F **V** a) Se n è pari allora T ammette sempre almeno una base spettrale.

F **V** b) Il polinomio caratteristico di $T \circ T$ coincide con il polinomio caratteristico di T.

F **V** c) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due autovettori di T associati a uno stesso autovalore λ di molteplicità algebrica 1, allora uno dei due è multiplo dell'altro.

F **V** d) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare standard) è spettrale per T.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

F V a) Se $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sono due spazi vettoriali reali esiste sempre una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ che sia suriettiva.

F V b) La matrice del cambiamento di base da una base $\mathcal{B}_1$ a una base $\mathcal{B}_2$ di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ di dimensione finita è sempre invertibile.

F V c) La matrice associata a una qualunque trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è indipendente dalla base scelta in $\mathbf{V}$.

F V d) Due matrici quadrate reali A e B di ordine 2 sono fra loro simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

6) Si dica se è vero o falso che le seguenti applicazioni T dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ a se stesso sono lineari.

F V a) $T : (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.

F V b) $T : (x, y) \mapsto (x + y, x + 3y + 1)$.

F V c) $T : (x, y) \mapsto (0, 0)$.

F V d) $T : (x, y) \mapsto (-y, x)$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false riguardo a un qualunque sistema lineare $\mathbf{S}$ di m equazioni in n incognite, di matrice completa C e matrice incompleta A.

F V a) Se $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$ allora $(3x_1 - 2x'_1, \dots, 3x_n - 2x'_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

F V b) Se $m = n$ e $\det A = 1$ allora $\mathbf{S}$ ammette una e una sola soluzione.

F V c) Se $\rho(C) = \rho(A)$ non è mai possibile eliminare una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

F V d) Se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora A e C hanno lo stesso rango.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

F V a) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

F V b) La matrice di Gram di $(-\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ è la matrice identica 3×3.

F V c) Le basi ordinate $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ e $(\tilde{\mathbf{e}}_1, -\tilde{\mathbf{e}}_2, -\tilde{\mathbf{e}}_3)$ hanno la stessa orientazione.

F V d) Se $\mathbf{U}$ è il sottospazio vettoriale euclideo generato da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_3$, allora ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è generato da $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

9) Si dica se è vero o falso che i seguenti insiemi sono campi rispetto alle operazioni indicate (nell'ordine dato).

F V a) $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di trasposizione.

F V b) Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, rispetto alle usuali operazioni di somma e di divisione.

F V c) Insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

F V d) $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di differenza di polinomi.