Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme delle classi di resto modulo 13 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'anello delle matrici reali 2×2 (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione di funzioni.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) $(2A + B) \cdot (2A - B) = 4A^2 - B^2$.
   B) A, B, C sono invertibili e $\det(A \cdot B \cdot C \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = 1$.
   C) $A + B + C$ è una matrice ortogonale.
   D) $\det(A + B + C) = \det A + \det B + \det C$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 a coefficienti strettamente maggiori di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici 2×2 che hanno esattamente due coefficienti uguali a 1 e due uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale $M_2(I\!R)$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x = y - z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.
   D) due basi di $I\!R^8[t]$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, hanno sempre lo stesso numero di elementi.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : I\!R^2[t] \to I\!R^2$, $F(a + bt + ct^2) = (a + b + c, a - c)$ è una trasf. lineare.
   B) il nucleo della trasf. lineare da $I\!R[t]$ a $I\!R[t]$ che manda ogni polinomio nella sua derivata è dato da tutti e soli i polinomi di $I\!R[t]$ costanti.
   C) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\rho(A) + \rho(B) = \rho(A + B)$.
   D) se $A \in M_n(I\!R)$ con A non regolare allora $\rho(A) = 0$.

5) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia $\bar{x}$ una sua soluzione (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) se $\bar{x}$ è il vettore nullo allora $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$.
   B) la matrice A è regolare.
   C) se il sistema lineare **S** rappresenta una retta di $I\!R^n$ allora il sistema lineare ottenuto cancellando un'equazione di **S** rappresenta un piano.
   D) ogni sottospazio vettoriale di $I\!R^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette una ed una sola rappresentazione parametrica.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Allora
   A) autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.
   B) se T è diagonalizzabile allora T^2 è anch'esso diagonalizzabile.
   C) se T è diagonalizzabile la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è n.
   D) se il polinomio caratteristico di T ammette radici reali allora ne ammette anche quello di $T - I$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \langle v, \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{0}, v \rangle$.
   B) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori non nulli a due a due ortogonali l'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   C) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $h + 1$.
   D) se u e v sono due vettori ortogonali di V allora $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 1$ e $x - y - z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) due piani di $I\!R^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0, 1)$ ed il piano di equazione $x - y + z = 0$ è $1/2$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 0, 1)$,$(0, 1, 2)$,$(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se A è simmetrica allora anche B lo è.
   B) T è iniettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   C) se T ammette n autovalori reali distinti allora $Tr(A)$ è la somma di tali autovalori.
   D) se A è regolare allora anche B lo è.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0,0,0)$,$(0,0,1)$,$(0,1,1)$,$(1,1,1)$ è $1/6$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.
   C) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1,2,3)$ rispetto al punto $(0,1,-1)$ è il punto $(1,3,2)$.
   D) due iperpiani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = -s$ e $x + y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è la matrice nulla allora $\rho(A) = 0$.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^4[t] \to \mathbb{R}^4[t]$, $F(p(t)) = p(t) + 1$ è una trasf. lineare.
   C) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasf. lineare con $\dim(Im\ T^2) < n$ allora $\ker T$ contiene almeno un vettore non nullo.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ regolari. Allora
   A) $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare.
   B) $(A^2 + B) \cdot (B^4 + A^3) = A^5 + B^5 + A^2 \cdot B^4 + B \cdot A^3$.
   C) se A e B hanno lo stesso determinante allora $\det A^5 \cdot \det B^{-5} = 1$.
   D) $\det A^{100} > 0$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due gruppi finiti hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.
   B) le due operazioni definite in un anello sono sempre associative.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette infinite rappresentazioni cartesiane.
   B) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   C) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) se $\rho(A) = 1$ allora il sistema lineare $\mathbf{S}$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^n$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x \neq y, z = t\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado dispari è una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) un sottoinsieme di $M_3(\mathbb{R})$ contenente esattamente 8 elementi non può essere un sistema di generatori per $M_3(\mathbb{R})$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) la composizione di due trasf. ortogonali di V in V è una trasf. ortogonale di V in V.
   B) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori non nulli di V esistono degli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v - u \rangle = \langle v, u \rangle - \|u\|^2$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) $\det(A+B+C) = \det A + \det B + \det C$.
   B) $(2A+B) \cdot (2A-B) = 4A^2 - B^2$.
   C) A, B, C sono invertibili e $\det(A \cdot B \cdot C \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = 1$.
   D) $A+B+C$ è una matrice ortogonale.

2) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia $\bar{x}$ una sua soluzione (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette una ed una sola rappresentazione parametrica.
   B) se il sistema lineare **S** rappresenta una retta di $\mathbb{R}^n$ allora il sistema lineare ottenuto cancellando un'equazione di **S** rappresenta un piano.
   C) la matrice A è regolare.
   D) se $\bar{x}$ è il vettore nullo allora $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Allora
   A) se il polinomio caratteristico di T ammette radici reali allora ne ammette anche quello di $T - I$.
   B) se T è diagonalizzabile la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è n.
   C) se T è diagonalizzabile allora T^2 è anch'esso diagonalizzabile.
   D) autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v-u \rangle = \langle v, u \rangle - \|u\|^2$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) la composizione di due trasf. ortogonali di V in V è una trasf. ortogonale di V in V.
   D) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori non nulli di V esistono degli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) due basi di $I\!R^8[t]$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, hanno sempre lo stesso numero di elementi.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 a coefficienti strettamente maggiori di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici 2×2 che hanno esattamente due coefficienti uguali a 1 e due uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale $M_2(I\!R)$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x = y - z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A \in M_n(I\!R)$ con A non regolare allora $\rho(A) = 0$.
   B) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\rho(A) + \rho(B) = \rho(A + B)$.
   C) il nucleo della trasf. lineare da $I\!R[t]$ a $I\!R[t]$ che manda ogni polinomio nella sua derivata è dato da tutti e soli i polinomi di $I\!R[t]$ costanti.
   D) la funzione $F : I\!R^2[t] \to I\!R^2$, $F(a + bt + ct^2) = (a + b + c, a - c)$ è una trasf. lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = -s$ e $x + y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) due iperpiani di $I\!R^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(0, 1, -1)$ è il punto $(1, 3, 2)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione di funzioni.
   B) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle classi di resto modulo 13 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'anello delle matrici reali 2×2 (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto di coordinate $(0,0,1)$ ed il piano di equazione $x-y+z=0$ è $1/2$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2+xy-y^2-1=0$ è una iperbole.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0,0,1)$,$(0,1,2)$,$(1,1,1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   D) due piani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $\rho(A)=1$ allora il sistema lineare $\mathbf{S}$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^n$.
   B) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A)=\rho(C)$.
   C) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   D) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette infinite rappresentazioni cartesiane.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.
   B) le due operazioni definite in un anello sono sempre associative.
   C) se due gruppi finiti hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e siano A,B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se A è regolare allora anche B lo è.
   B) se T ammette n autovalori reali distinti allora $Tr(A)$ è la somma di tali autovalori.
   C) T è iniettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   D) se A è simmetrica allora anche B lo è.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x+y=1$ e $x-y-z=0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori non nulli a due a due ortogonali l'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   B) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $h + 1$.
   C) se u e v sono due vettori ortogonali di V allora $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v\rangle = \langle v, \mathbf{0}\rangle + \langle \mathbf{0}, v\rangle$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) un sottoinsieme di $M_3(\mathbb{R})$ contenente esattamente 8 elementi non può essere un sistema di generatori per $M_3(\mathbb{R})$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x \neq y, z = t\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado dispari è una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ regolari. Allora
   A) $\det A^{100} > 0$.
   B) $(A^2 + B) \cdot (B^4 + A^3) = A^5 + B^5 + A^2 \cdot B^4 + B \cdot A^3$.
   C) $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare.
   D) se A e B hanno lo stesso determinante allora $\det A^5 \cdot \det B^{-5} = 1$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.
   B) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasf. lineare con $\dim(Im\ T^2) < n$ allora $\ker T$ contiene almeno un vettore non nullo.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^4[t] \to \mathbb{R}^4[t]$, $F(p(t)) = p(t) + 1$ è una trasf. lineare.
   D) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è la matrice nulla allora $\rho(A) = 0$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ regolari. Allora
   A) $\det A^{100} > 0$.
   B) $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare.
   C) $(A^2 + B) \cdot (B^4 + A^3) = A^5 + B^5 + A^2 \cdot B^4 + B \cdot A^3$.
   D) se A e B hanno lo stesso determinante allora $\det A^5 \cdot \det B^{-5} = 1$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) un sottoinsieme di $M_3(\mathbb{R})$ contenente esattamente 8 elementi non può essere un sistema di generatori per $M_3(\mathbb{R})$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x \neq y, z = t\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado dispari è una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 1$ e $x - y - z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasf. lineare da $\mathbb{R}[t]$ a $\mathbb{R}[t]$ che manda ogni polinomio nella sua derivata è dato da tutti e soli i polinomi di $\mathbb{R}[t]$ costanti.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2[t] \to \mathbb{R}^2$, $F(a + bt + ct^2) = (a + b + c, a - c)$ è una trasf. lineare.
   C) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ con A non regolare allora $\rho(A) = 0$.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) + \rho(B) = \rho(A + B)$.

5) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia $\bar{x}$ una sua soluzione (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) la matrice A è regolare.
   B) se $\bar{x}$ è il vettore nullo allora $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$.
   C) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette una ed una sola rappresentazione parametrica.
   D) se il sistema lineare **S** rappresenta una retta di $\mathbb{R}^n$ allora il sistema lineare ottenuto cancellando un'equazione di **S** rappresenta un piano.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora T^2 è anch'esso diagonalizzabile.
   B) autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.
   C) se il polinomio caratteristico di T ammette radici reali allora ne ammette anche quello di $T - I$.
   D) se T è diagonalizzabile la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è n.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori non nulli a due a due ortogonali l'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   B) se u e v sono due vettori ortogonali di V allora $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \langle v, \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{0}, v \rangle$.
   D) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $h + 1$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0, 1)$ ed il piano di equazione $x - y + z = 0$ è $1/2$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 0, 1)$,$(0, 1, 2)$,$(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   C) due piani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.
   B) se due gruppi finiti hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.
   C) le due operazioni definite in un anello sono sempre associative.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v - u \rangle = \langle v, u \rangle - \|u\|^2$.
   C) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori non nulli di V esistono degli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   D) la composizione di due trasf. ortogonali di V in V è una trasf. ortogonale di V in V.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T è iniettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   B) se A è simmetrica allora anche B lo è.
   C) se T ammette n autovalori reali distinti allora $Tr(A)$ è la somma di tali autovalori.
   D) se A è regolare allora anche B lo è.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) A, B, C sono invertibili e $\det(A \cdot B \cdot C \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = 1$.
   B) $A + B + C$ è una matrice ortogonale.
   C) $(2A + B) \cdot (2A - B) = 4A^2 - B^2$.
   D) $\det(A + B + C) = \det A + \det B + \det C$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle classi di resto modulo 13 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'anello delle matrici reali 2×2 (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   C) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione di funzioni.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = -s$ e $x + y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(0, 1, -1)$ è il punto $(1, 3, 2)$.

B) due iperpiani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.

C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.

D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):

A) la funzione $F : \mathbb{R}^4[t] \to \mathbb{R}^4[t]$, $F(p(t)) = p(t) + 1$ è una trasf. lineare.

B) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è la matrice nulla allora $\rho(A) = 0$.

C) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasf. lineare con $\dim(Im\ T^2) < n$ allora $\ker T$ contiene almeno un vettore non nullo.

D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme delle matrici 2×2 che hanno esattamente due coefficienti uguali a 1 e due uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.

C) l'insieme delle matrici reali 3×3 a coefficienti strettamente maggiori di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

D) due basi di $\mathbb{R}^8[t]$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, hanno sempre lo stesso numero di elementi.

9) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora

A) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ il sistema lineare **S** ammette una ed una sola soluzione.

B) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette infinite rappresentazioni cartesiane.

C) **S** ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

D) se $\rho(A) = 1$ allora il sistema lineare **S** rappresenta una retta di $\mathbb{R}^n$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ regolari. Allora
   A) $(A^2 + B) \cdot (B^4 + A^3) = A^5 + B^5 + A^2 \cdot B^4 + B \cdot A^3$.
   B) se A e B hanno lo stesso determinante allora $\det A^5 \cdot \det B^{-5} = 1$.
   C) $\det A^{100} > 0$.
   D) $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x \neq y, z = t\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado dispari è una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) un sottoinsieme di $M_3(\mathbb{R})$ contenente esattamente 8 elementi non può essere un sistema di generatori per $M_3(\mathbb{R})$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasf. lineare da $\mathbb{R}[t]$ a $\mathbb{R}[t]$ che manda ogni polinomio nella sua derivata è dato da tutti e soli i polinomi di $\mathbb{R}[t]$ costanti.
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) + \rho(B) = \rho(A + B)$.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^2[t] \to \mathbb{R}^2$, $F(a + bt + ct^2) = (a + b + c, a - c)$ è una trasf. lineare.
   D) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ con A non regolare allora $\rho(A) = 0$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia $\bar{x}$ una sua soluzione (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) la matrice A è regolare.
   B) se il sistema lineare $\mathbf{S}$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^n$ allora il sistema lineare ottenuto cancellando un'equazione di $\mathbf{S}$ rappresenta un piano.
   C) se $\bar{x}$ è il vettore nullo allora $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$.
   D) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette una ed una sola rappresentazione parametrica.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) due iperpiani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0,0,0)$,$(0,0,1)$,$(0,1,1)$,$(1,1,1)$ è $1/6$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2+2xy+y^2+2x=0$ è una parabola.
   D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1,2,3)$ rispetto al punto $(0,1,-1)$ è il punto $(1,3,2)$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) le due operazioni definite in un anello sono sempre associative.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.
   D) se due gruppi finiti hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora T^2 è anch'esso diagonalizzabile.
   B) se T è diagonalizzabile la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è n.
   C) autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.
   D) se il polinomio caratteristico di T ammette radici reali allora ne ammette anche quello di $T-I$.

8) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $u,v\in V$ risulta $\langle u,v-u\rangle=\langle v,u\rangle-\|u\|^2$.
   B) la composizione di due trasf. ortogonali di V in V è una trasf. ortogonale di V in V.
   C) se $v_1,\dots,v_n$ sono vettori non nulli di V esistono degli scalari $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1v_1,\dots,\lambda_nv_n\}$ è una base ortonormale di V.
   D) per ogni $u,v\in V$ risulta $|\langle u,v\rangle|=\|u\|\cdot\|v\|$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x=s, y=t, z=-s$ e $x+y-z=3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale di $I\!R^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette infinite rappresentazioni cartesiane.
   B) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   C) se $\rho(A) = 1$ allora il sistema lineare $\mathbf{S}$ rappresenta una retta di $I\!R^n$.
   D) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 1$ e $x - y - z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme delle classi di resto modulo 13 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione di funzioni.
   D) l'anello delle matrici reali 2×2 (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0, 1)$ ed il piano di equazione $x - y + z = 0$ è $1/2$.
   C) due piani di $I\!R^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 0, 1)$,$(0, 1, 2)$,$(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 a coefficienti strettamente maggiori di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici 2×2 che hanno esattamente due coefficienti uguali a 1 e due uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) due basi di $\mathbb{R}^8[t]$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, hanno sempre lo stesso numero di elementi.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) $(2A + B) \cdot (2A - B) = 4A^2 - B^2$.
   B) A, B, C sono invertibili e $\det(A \cdot B \cdot C \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = 1$.
   C) $\det(A + B + C) = \det A + \det B + \det C$.
   D) $A + B + C$ è una matrice ortogonale.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se A è simmetrica allora anche B lo è.
   B) se T ammette n autovalori reali distinti allora $Tr(A)$ è la somma di tali autovalori.
   C) se A è regolare allora anche B lo è.
   D) T è iniettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è la matrice nulla allora $\rho(A) = 0$.
   B) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasf. lineare con $\dim(Im\ T^2) < n$ allora $\ker T$ contiene almeno un vettore non nullo.
   C) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^4[t] \to \mathbb{R}^4[t]$, $F(p(t)) = p(t) + 1$ è una trasf. lineare.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $h + 1$.
   B) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori non nulli a due a due ortogonali l'insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \langle v, \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{0}, v \rangle$.
   D) se u e v sono due vettori ortogonali di V allora $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici 2×2 che hanno esattamente due coefficienti uguali a 1 e due uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale $M_2(I\!R)$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) due basi di $I\!R^8[t]$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, hanno sempre lo stesso numero di elementi.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x = y - z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 a coefficienti strettamente maggiori di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 1$ e $x - y - z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0, 1)$ ed il piano di equazione $x - y + z = 0$ è $1/2$.
   B) due piani di $I\!R^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 0, 1)$,$(0, 1, 2)$,$(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A \in M_n(I\!R)$ con A non regolare allora $\rho(A) = 0$.
   B) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\rho(A) + \rho(B) = \rho(A + B)$.
   C) la funzione $F : I\!R^2[t] \to I\!R^2$, $F(a + bt + ct^2) = (a + b + c, a - c)$ è una trasf. lineare.
   D) il nucleo della trasf. lineare da $I\!R[t]$ a $I\!R[t]$ che manda ogni polinomio nella sua derivata è dato da tutti e soli i polinomi di $I\!R[t]$ costanti.

5) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia $\bar{x}$ una sua soluzione (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette una ed una sola rappresentazione parametrica.
   B) se il sistema lineare **S** rappresenta una retta di $\mathbb{R}^n$ allora il sistema lineare ottenuto cancellando un'equazione di **S** rappresenta un piano.
   C) se $\bar{x}$ è il vettore nullo allora $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$.
   D) la matrice A è regolare.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Allora
   A) se il polinomio caratteristico di T ammette radici reali allora ne ammette anche quello di $T - I$.
   B) se T è diagonalizzabile la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è n.
   C) autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.
   D) se T è diagonalizzabile allora T^2 è anch'esso diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori non nulli a due a due ortogonali l'insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \langle v, \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{0}, v \rangle$.
   C) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $h + 1$.
   D) se u e v sono due vettori ortogonali di V allora $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle classi di resto modulo 13 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione di funzioni.
   C) l'anello delle matrici reali 2×2 (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   D) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

9) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) A, B, C sono invertibili e $\det(A \cdot B \cdot C \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = 1$.
   B) $\det(A + B + C) = \det A + \det B + \det C$.
   C) $A + B + C$ è una matrice ortogonale.
   D) $(2A + B) \cdot (2A - B) = 4A^2 - B^2$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = -s$ e $x + y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

2) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v\rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori non nulli di V esistono degli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) la composizione di due trasf. ortogonali di V in V è una trasf. ortogonale di V in V.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v - u\rangle = \langle v, u\rangle - \|u\|^2$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ regolari. Allora
   A) se A e B hanno lo stesso determinante allora $\det A^5 \cdot \det B^{-5} = 1$.
   B) $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare.
   C) $(A^2 + B) \cdot (B^4 + A^3) = A^5 + B^5 + A^2 \cdot B^4 + B \cdot A^3$.
   D) $\det A^{100} > 0$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) se due gruppi finiti hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.
   C) le due operazioni definite in un anello sono sempre associative.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado dispari è una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x \neq y, z = t\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, rispetto alle operazioni indotte.
   D) un sottoinsieme di $M_3(\mathbb{R})$ contenente esattamente 8 elementi non può essere un sistema di generatori per $M_3(\mathbb{R})$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T è iniettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   B) se A è simmetrica allora anche B lo è.
   C) se T ammette n autovalori reali distinti allora $Tr(A)$ è la somma di tali autovalori.
   D) se A è regolare allora anche B lo è.

7) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ il sistema lineare **S** ammette una ed una sola soluzione.
   B) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette infinite rappresentazioni cartesiane.
   C) **S** ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) se $\rho(A) = 1$ allora il sistema lineare **S** rappresenta una retta di $\mathbb{R}^n$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^4[t] \to \mathbb{R}^4[t]$, $F(p(t)) = p(t) + 1$ è una trasf. lineare.
   B) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è la matrice nulla allora $\rho(A) = 0$.
   C) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasf. lineare con $\dim(Im\ T^2) < n$ allora $\ker T$ contiene almeno un vettore non nullo.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(0, 1, -1)$ è il punto $(1, 3, 2)$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.
   D) due iperpiani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ con A non regolare allora $\rho(A) = 0$.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2[t] \to \mathbb{R}^2$, $F(a + bt + ct^2) = (a + b + c, a - c)$ è una trasf. lineare.
   C) il nucleo della trasf. lineare da $\mathbb{R}[t]$ a $\mathbb{R}[t]$ che manda ogni polinomio nella sua derivata è dato da tutti e soli i polinomi di $\mathbb{R}[t]$ costanti.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) + \rho(B) = \rho(A + B)$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Allora
   A) se il polinomio caratteristico di T ammette radici reali allora ne ammette anche quello di $T - I$.
   B) autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.
   C) se T è diagonalizzabile allora T^2 è anch'esso diagonalizzabile.
   D) se T è diagonalizzabile la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è n.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v - u \rangle = \langle v, u \rangle - \|u\|^2$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori non nulli di V esistono degli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   D) la composizione di due trasf. ortogonali di V in V è una trasf. ortogonale di V in V.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia $\bar{x}$ una sua soluzione (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette una ed una sola rappresentazione parametrica.
   B) se $\bar{x}$ è il vettore nullo allora $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$.
   C) la matrice A è regolare.
   D) se il sistema lineare $\mathbf{S}$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^n$ allora il sistema lineare ottenuto cancellando un'equazione di $\mathbf{S}$ rappresenta un piano.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = -s$ e $x + y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) due iperpiani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(0, 1, -1)$ è il punto $(1, 3, 2)$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione di funzioni.
   B) l'anello delle matrici reali 2×2 (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   C) l'insieme delle classi di resto modulo 13 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) $\det(A + B + C) = \det A + \det B + \det C$.
   B) $A + B + C$ è una matrice ortogonale.
   C) A, B, C sono invertibili e $\det(A \cdot B \cdot C \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = 1$.
   D) $(2A + B) \cdot (2A - B) = 4A^2 - B^2$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) due basi di $\mathbb{R}^8[t]$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, hanno sempre lo stesso numero di elementi.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle matrici 2×2 che hanno esattamente due coefficienti uguali a 1 e due uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 a coefficienti strettamente maggiori di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ regolari. Allora
   A) $(A^2 + B) \cdot (B^4 + A^3) = A^5 + B^5 + A^2 \cdot B^4 + B \cdot A^3$.
   B) se A e B hanno lo stesso determinante allora $\det A^5 \cdot \det B^{-5} = 1$.
   C) $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare.
   D) $\det A^{100} > 0$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T è iniettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   B) se A è simmetrica allora anche B lo è.
   C) se A è regolare allora anche B lo è.
   D) se T ammette n autovalori reali distinti allora $Tr(A)$ è la somma di tali autovalori.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori non nulli a due a due ortogonali l'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \langle v, \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{0}, v \rangle$.
   C) se u e v sono due vettori ortogonali di V allora $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
   D) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $h + 1$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x \neq y, z = t\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado dispari è una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) un sottoinsieme di $M_3(\mathbb{R})$ contenente esattamente 8 elementi non può essere un sistema di generatori per $M_3(\mathbb{R})$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) le due operazioni definite in un anello sono sempre associative.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) se due gruppi finiti hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 1$ e $x - y - z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   B) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette infinite rappresentazioni cartesiane.
   C) se $\rho(A) = 1$ allora il sistema lineare $\mathbf{S}$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^n$.
   D) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^4[t] \to \mathbb{R}^4[t]$, $F(p(t)) = p(t) + 1$ è una trasf. lineare.
   B) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è la matrice nulla allora $\rho(A) = 0$.
   C) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.
   D) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasf. lineare con $\dim(Im\ T^2) < n$ allora $\ker T$ contiene almeno un vettore non nullo.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0, 1)$ ed il piano di equazione $x - y + z = 0$ è $1/2$.
   B) due piani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 0, 1)$,$(0, 1, 2)$,$(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che si annullano in 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) un sottoinsieme di $M_3(I\!R)$ contenente esattamente 8 elementi non può essere un sistema di generatori per $M_3(I\!R)$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in I\!R^4 : x \neq y, z = t\}$ è un sottospazio vettoriale di $I\!R^4$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado dispari è una base per lo spazio vettoriale $I\!R[t]$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\rho(A) + \rho(B) = \rho(A + B)$.
   B) se $A \in M_n(I\!R)$ con A non regolare allora $\rho(A) = 0$.
   C) il nucleo della trasf. lineare da $I\!R[t]$ a $I\!R[t]$ che manda ogni polinomio nella sua derivata è dato da tutti e soli i polinomi di $I\!R[t]$ costanti.
   D) la funzione $F : I\!R^2[t] \to I\!R^2$, $F(a + bt + ct^2) = (a + b + c, a - c)$ è una trasf. lineare.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia $\bar{x}$ una sua soluzione (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se il sistema lineare $\mathbf{S}$ rappresenta una retta di $I\!R^n$ allora il sistema lineare ottenuto cancellando un'equazione di $\mathbf{S}$ rappresenta un piano.
   B) ogni sottospazio vettoriale di $I\!R^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette una ed una sola rappresentazione parametrica.
   C) la matrice A è regolare.
   D) se $\bar{x}$ è il vettore nullo allora $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Allora
   A) se T è diagonalizzabile la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è n.
   B) se il polinomio caratteristico di T ammette radici reali allora ne ammette anche quello di $T - I$.
   C) se T è diagonalizzabile allora T^2 è anch'esso diagonalizzabile.
   D) autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ regolari. Allora
   A) $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare.
   B) $\det A^{100} > 0$.
   C) $(A^2 + B) \cdot (B^4 + A^3) = A^5 + B^5 + A^2 \cdot B^4 + B \cdot A^3$.
   D) se A e B hanno lo stesso determinante allora $\det A^5 \cdot \det B^{-5} = 1$.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 1$ e $x - y - z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0, 1)$ ed il piano di equazione $x - y + z = 0$ è $1/2$.
   C) due piani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 0, 1)$,$(0, 1, 2)$,$(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $h + 1$.
   B) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori non nulli a due a due ortogonali l'insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \langle v, \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{0}, v \rangle$.
   D) se u e v sono due vettori ortogonali di V allora $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due gruppi finiti hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.
   C) le due operazioni definite in un anello sono sempre associative.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = -s$ e $x + y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v - u \rangle = \langle v, u \rangle - \|u\|^2$.
   B) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori non nulli di V esistono degli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) la composizione di due trasf. ortogonali di V in V è una trasf. ortogonale di V in V.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) $A + B + C$ è una matrice ortogonale.
   B) $\det(A + B + C) = \det A + \det B + \det C$.
   C) A, B, C sono invertibili e $\det(A \cdot B \cdot C \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = 1$.
   D) $(2A + B) \cdot (2A - B) = 4A^2 - B^2$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'anello delle matrici reali 2×2 (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione di funzioni.
   C) l'insieme delle classi di resto modulo 13 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):

A) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.

B) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasf. lineare con $\dim(Im\ T^2) < n$ allora $\ker T$ contiene almeno un vettore non nullo.

C) la funzione $F : \mathbb{R}^4[t] \to \mathbb{R}^4[t]$, $F(p(t)) = p(t) + 1$ è una trasf. lineare.

D) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è la matrice nulla allora $\rho(A) = 0$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.

B) due basi di $\mathbb{R}^8[t]$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, hanno sempre lo stesso numero di elementi.

C) l'insieme delle matrici 2×2 che hanno esattamente due coefficienti uguali a 1 e due uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

D) l'insieme delle matrici reali 3×3 a coefficienti strettamente maggiori di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) due iperpiani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.

B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.

C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.

D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(0, 1, -1)$ è il punto $(1, 3, 2)$.

8) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora

A) se $\rho(A) = 1$ allora il sistema lineare **S** rappresenta una retta di $\mathbb{R}^n$.

B) **S** ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

C) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ il sistema lineare **S** ammette una ed una sola soluzione.

D) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette infinite rappresentazioni cartesiane.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora

A) se A è regolare allora anche B lo è.

B) se T ammette n autovalori reali distinti allora $Tr(A)$ è la somma di tali autovalori.

C) T è iniettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.

D) se A è simmetrica allora anche B lo è.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasf. lineare da $\mathbb{R}[t]$ a $\mathbb{R}[t]$ che manda ogni polinomio nella sua derivata è dato da tutti e soli i polinomi di $\mathbb{R}[t]$ costanti.
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) + \rho(B) = \rho(A + B)$.
   C) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ con A non regolare allora $\rho(A) = 0$.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^2[t] \to \mathbb{R}^2$, $F(a + bt + ct^2) = (a + b + c, a - c)$ è una trasf. lineare.

2) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v\rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v - u\rangle = \langle v, u\rangle - \|u\|^2$.
   C) la composizione di due trasf. ortogonali di V in V è una trasf. ortogonale di V in V.
   D) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori non nulli di V esistono degli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.

3) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia $\bar{x}$ una sua soluzione (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) la matrice A è regolare.
   B) se il sistema lineare **S** rappresenta una retta di $\mathbb{R}^n$ allora il sistema lineare ottenuto cancellando un'equazione di **S** rappresenta un piano.
   C) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette una ed una sola rappresentazione parametrica.
   D) se $\bar{x}$ è il vettore nullo allora $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = -s$ e $x + y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(0, 1, -1)$ è il punto $(1, 3, 2)$.

B) due iperpiani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.

C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.

D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Allora

A) se T è diagonalizzabile allora T^2 è anch'esso diagonalizzabile.

B) se T è diagonalizzabile la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è n.

C) se il polinomio caratteristico di T ammette radici reali allora ne ammette anche quello di $T - I$.

D) autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.

B) se due gruppi finiti hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.

C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

D) le due operazioni definite in un anello sono sempre associative.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ regolari. Allora

A) $\det A^{100} > 0$.

B) $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare.

C) se A e B hanno lo stesso determinante allora $\det A^5 \cdot \det B^{-5} = 1$.

D) $(A^2 + B) \cdot (B^4 + A^3) = A^5 + B^5 + A^2 \cdot B^4 + B \cdot A^3$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) un sottoinsieme di $M_3(\mathbb{R})$ contenente esattamente 8 elementi non può essere un sistema di generatori per $M_3(\mathbb{R})$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

C) l'insieme dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado dispari è una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

D) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x \neq y, z = t\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione di funzioni.
   B) l'insieme delle classi di resto modulo 13 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'anello delle matrici reali 2×2 (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se A è regolare allora anche B lo è.
   B) T è iniettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   C) se T ammette n autovalori reali distinti allora $Tr(A)$ è la somma di tali autovalori.
   D) se A è simmetrica allora anche B lo è.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) due basi di $\mathbb{R}^8[t]$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, hanno sempre lo stesso numero di elementi.
   B) l'insieme delle matrici 2×2 che hanno esattamente due coefficienti uguali a 1 e due uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 a coefficienti strettamente maggiori di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.

4) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) $\det(A + B + C) = \det A + \det B + \det C$.
   B) A, B, C sono invertibili e $\det(A \cdot B \cdot C \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = 1$.
   C) $(2A + B) \cdot (2A - B) = 4A^2 - B^2$.
   D) $A + B + C$ è una matrice ortogonale.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $\rho(A) = 1$ allora il sistema lineare $\mathbf{S}$ rappresenta una retta di $I\!R^n$.
   B) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   C) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) ogni sottospazio vettoriale di $I\!R^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette infinite rappresentazioni cartesiane.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.
   B) la funzione $F : I\!R^4[t] \to I\!R^4[t]$, $F(p(t)) = p(t) + 1$ è una trasf. lineare.
   C) se $T : I\!R^n \to I\!R^n$ è una trasf. lineare con $\dim(Im\ T^2) < n$ allora $\ker T$ contiene almeno un vettore non nullo.
   D) se $A \in M_n(I\!R)$ è la matrice nulla allora $\rho(A) = 0$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se u e v sono due vettori ortogonali di V allora $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
   B) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $h + 1$.
   C) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori non nulli a due a due ortogonali l'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \langle v, \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{0}, v \rangle$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 0, 1)$,$(0, 1, 2)$,$(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0, 1)$ ed il piano di equazione $x - y + z = 0$ è $1/2$.
   D) due piani di $I\!R^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 1$ e $x - y - z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 1$ e $x - y - z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0, 1)$ ed il piano di equazione $x - y + z = 0$ è $1/2$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) due piani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 0, 1)$,$(0, 1, 2)$,$(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici 2×2 che hanno esattamente due coefficienti uguali a 1 e due uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) due basi di $\mathbb{R}^8[t]$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, hanno sempre lo stesso numero di elementi.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 a coefficienti strettamente maggiori di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Allora
   A) autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.
   B) se T è diagonalizzabile la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è n.
   C) se T è diagonalizzabile allora T^2 è anch'esso diagonalizzabile.
   D) se il polinomio caratteristico di T ammette radici reali allora ne ammette anche quello di $T - I$.

5) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori non nulli a due a due ortogonali l'insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   B) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $h + 1$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \langle v, \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{0}, v \rangle$.
   D) se u e v sono due vettori ortogonali di V allora $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle classi di resto modulo 13 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione di funzioni.
   C) l'anello delle matrici reali 2×2 (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   D) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) A, B, C sono invertibili e $\det(A \cdot B \cdot C \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = 1$.
   B) $\det(A + B + C) = \det A + \det B + \det C$.
   C) $A + B + C$ è una matrice ortogonale.
   D) $(2A + B) \cdot (2A - B) = 4A^2 - B^2$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : I\!R^2[t] \to I\!R^2$, $F(a + bt + ct^2) = (a + b + c, a - c)$ è una trasf. lineare.
   B) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\rho(A) + \rho(B) = \rho(A + B)$.
   C) il nucleo della trasf. lineare da $I\!R[t]$ a $I\!R[t]$ che manda ogni polinomio nella sua derivata è dato da tutti e soli i polinomi di $I\!R[t]$ costanti.
   D) se $A \in M_n(I\!R)$ con A non regolare allora $\rho(A) = 0$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia $\bar{x}$ una sua soluzione (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $\bar{x}$ è il vettore nullo allora $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$.
   B) se il sistema lineare $\mathbf{S}$ rappresenta una retta di $I\!R^n$ allora il sistema lineare ottenuto cancellando un'equazione di $\mathbf{S}$ rappresenta un piano.
   C) la matrice A è regolare.
   D) ogni sottospazio vettoriale di $I\!R^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette una ed una sola rappresentazione parametrica.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasf. lineare con $\dim(Im\ T^2) < n$ allora $\ker T$ contiene almeno un vettore non nullo.
   B) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è la matrice nulla allora $\rho(A) = 0$.
   C) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^4[t] \to \mathbb{R}^4[t]$, $F(p(t)) = p(t) + 1$ è una trasf. lineare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due gruppi finiti hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) le due operazioni definite in un anello sono sempre associative.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T ammette n autovalori reali distinti allora $Tr(A)$ è la somma di tali autovalori.
   B) se A è simmetrica allora anche B lo è.
   C) se A è regolare allora anche B lo è.
   D) T è iniettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.
   B) due iperpiani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.
   C) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(0, 1, -1)$ è il punto $(1, 3, 2)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) un sottoinsieme di $M_3(\mathbb{R})$ contenente esattamente 8 elementi non può essere un sistema di generatori per $M_3(\mathbb{R})$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado dispari è una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x \neq y, z = t\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, rispetto alle operazioni indotte.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ regolari. Allora
   A) $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare.
   B) $\det A^{100} > 0$.
   C) se A e B hanno lo stesso determinante allora $\det A^5 \cdot \det B^{-5} = 1$.
   D) $(A^2 + B) \cdot (B^4 + A^3) = A^5 + B^5 + A^2 \cdot B^4 + B \cdot A^3$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori non nulli di V esistono degli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v - u \rangle = \langle v, u \rangle - \|u\|^2$.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) la composizione di due trasf. ortogonali di V in V è una trasf. ortogonale di V in V.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette infinite rappresentazioni cartesiane.
   C) se $\rho(A) = 1$ allora il sistema lineare $\mathbf{S}$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^n$.
   D) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = -s$ e $x + y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasf. lineare da $\mathbb{R}[t]$ a $\mathbb{R}[t]$ che manda ogni polinomio nella sua derivata è dato da tutti e soli i polinomi di $\mathbb{R}[t]$ costanti.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2[t] \to \mathbb{R}^2$, $F(a + bt + ct^2) = (a + b + c, a - c)$ è una trasf. lineare.
   C) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) + \rho(B) = \rho(A + B)$.
   D) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ con A non regolare allora $\rho(A) = 0$.

2) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia $\bar{x}$ una sua soluzione (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) la matrice A è regolare.
   B) se $\bar{x}$ è il vettore nullo allora $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$.
   C) se il sistema lineare **S** rappresenta una retta di $\mathbb{R}^n$ allora il sistema lineare ottenuto cancellando un'equazione di **S** rappresenta un piano.
   D) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette una ed una sola rappresentazione parametrica.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = -s$ e $x + y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) due iperpiani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(0, 1, -1)$ è il punto $(1, 3, 2)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.

5) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Allora
  A) se T è diagonalizzabile allora T^2 è anch'esso diagonalizzabile.
  B) autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.
  C) se T è diagonalizzabile la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è n.
  D) se il polinomio caratteristico di T ammette radici reali allora ne ammette anche quello di $T - I$.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
  A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v - u \rangle = \langle v, u \rangle - \|u\|^2$.
  B) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.
  C) la composizione di due trasf. ortogonali di V in V è una trasf. ortogonale di V in V.
  D) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori non nulli di V esistono degli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
  A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione di funzioni.
  B) l'anello delle matrici reali 2×2 (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
  C) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
  D) l'insieme delle classi di resto modulo 13 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
  A) $\det(A + B + C) = \det A + \det B + \det C$.
  B) $A + B + C$ è una matrice ortogonale.
  C) $(2A + B) \cdot (2A - B) = 4A^2 - B^2$.
  D) A, B, C sono invertibili e $\det(A \cdot B \cdot C \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = 1$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
  A) due basi di $I\!R^8[t]$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, hanno sempre lo stesso numero di elementi.
  B) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x = y - z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.
  C) l'insieme delle matrici reali 3×3 a coefficienti strettamente maggiori di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
  D) l'insieme delle matrici 2×2 che hanno esattamente due coefficienti uguali a 1 e due uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale $M_2(I\!R)$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ regolari. Allora
   A) se A e B hanno lo stesso determinante allora $\det A^5 \cdot \det B^{-5} = 1$.
   B) $\det A^{100} > 0$.
   C) $(A^2 + B) \cdot (B^4 + A^3) = A^5 + B^5 + A^2 \cdot B^4 + B \cdot A^3$.
   D) $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.
   C) le due operazioni definite in un anello sono sempre associative.
   D) se due gruppi finiti hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado dispari è una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) un sottoinsieme di $M_3(\mathbb{R})$ contenente esattamente 8 elementi non può essere un sistema di generatori per $M_3(\mathbb{R})$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x \neq y, z = t\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori non nulli a due a due ortogonali l'insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \langle v, \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{0}, v \rangle$.
   C) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $h + 1$.
   D) se u e v sono due vettori ortogonali di V allora $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

5) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) se $\rho(A) = 1$ allora il sistema lineare **S** rappresenta una retta di $\mathbb{R}^n$.
   B) **S** ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   C) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ il sistema lineare **S** ammette una ed una sola soluzione.
   D) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette infinite rappresentazioni cartesiane.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.
   B) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasf. lineare con $\dim(Im\ T^2) < n$ allora $\ker T$ contiene almeno un vettore non nullo.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^4[t] \to \mathbb{R}^4[t]$, $F(p(t)) = p(t) + 1$ è una trasf. lineare.
   D) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è la matrice nulla allora $\rho(A) = 0$.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 1$ e $x - y - z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0, 1)$ ed il piano di equazione $x - y + z = 0$ è $1/2$.
   B) due piani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 0, 1)$,$(0, 1, 2)$,$(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se A è regolare allora anche B lo è.
   B) se T ammette n autovalori reali distinti allora $Tr(A)$ è la somma di tali autovalori.
   C) T è iniettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   D) se A è simmetrica allora anche B lo è.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia $\bar{x}$ una sua soluzione (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) la matrice A è regolare.
   B) se $\bar{x}$ è il vettore nullo allora $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$.
   C) se il sistema lineare $\mathbf{S}$ rappresenta una retta di $I\!R^n$ allora il sistema lineare ottenuto cancellando un'equazione di $\mathbf{S}$ rappresenta un piano.
   D) ogni sottospazio vettoriale di $I\!R^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette una ed una sola rappresentazione parametrica.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora T^2 è anch'esso diagonalizzabile.
   B) autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.
   C) se T è diagonalizzabile la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è n.
   D) se il polinomio caratteristico di T ammette radici reali allora ne ammette anche quello di $T - I$.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori non nulli a due a due ortogonali l'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   B) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $h + 1$.
   C) se u e v sono due vettori ortogonali di V allora $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \langle v, \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{0}, v \rangle$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) le due operazioni definite in un anello sono sempre associative.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) se due gruppi finiti hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 1$ e $x - y - z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0, 1)$ ed il piano di equazione $x - y + z = 0$ è $1/2$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 0, 1)$,$(0, 1, 2)$,$(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   D) due piani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ regolari. Allora
   A) $(A^2 + B) \cdot (B^4 + A^3) = A^5 + B^5 + A^2 \cdot B^4 + B \cdot A^3$.
   B) se A e B hanno lo stesso determinante allora $\det A^5 \cdot \det B^{-5} = 1$.
   C) $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare.
   D) $\det A^{100} > 0$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x \neq y, z = t\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado dispari è una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) un sottoinsieme di $M_3(\mathbb{R})$ contenente esattamente 8 elementi non può essere un sistema di generatori per $M_3(\mathbb{R})$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasf. lineare da $\mathbb{R}[t]$ a $\mathbb{R}[t]$ che manda ogni polinomio nella sua derivata è dato da tutti e soli i polinomi di $\mathbb{R}[t]$ costanti.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2[t] \to \mathbb{R}^2$, $F(a + bt + ct^2) = (a + b + c, a - c)$ è una trasf. lineare.
   C) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) + \rho(B) = \rho(A + B)$.
   D) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ con A non regolare allora $\rho(A) = 0$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) A, B, C sono invertibili e $\det(A \cdot B \cdot C \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = 1$.
   B) $(2A + B) \cdot (2A - B) = 4A^2 - B^2$.
   C) $A + B + C$ è una matrice ortogonale.
   D) $\det(A + B + C) = \det A + \det B + \det C$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle classi di resto modulo 13 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'anello delle matrici reali 2×2 (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione di funzioni.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : I\!R^n \to I\!R^n$ è una trasf. lineare con $\dim(Im\ T^2) < n$ allora $\ker T$ contiene almeno un vettore non nullo.
   B) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.
   C) se $A \in M_n(I\!R)$ è la matrice nulla allora $\rho(A) = 0$.
   D) la funzione $F : I\!R^4[t] \to I\!R^4[t]$, $F(p(t)) = p(t) + 1$ è una trasf. lineare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici 2×2 che hanno esattamente due coefficienti uguali a 1 e due uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale $M_2(I\!R)$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 a coefficienti strettamente maggiori di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x = y - z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.
   D) due basi di $I\!R^8[t]$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, hanno sempre lo stesso numero di elementi.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = -s$ e $x + y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori non nulli di V esistono degli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v - u \rangle = \langle v, u \rangle - \|u\|^2$.
   D) la composizione di due trasf. ortogonali di V in V è una trasf. ortogonale di V in V.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T ammette n autovalori reali distinti allora $Tr(A)$ è la somma di tali autovalori.
   B) se A è regolare allora anche B lo è.
   C) se A è simmetrica allora anche B lo è.
   D) T è iniettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(0, 1, -1)$ è il punto $(1, 3, 2)$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.
   C) due iperpiani di $\mathbb{R}^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) se $\rho(A) = 1$ allora il sistema lineare $\mathbf{S}$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^n$.
   C) ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette infinite rappresentazioni cartesiane.
   D) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori non nulli di V esistono degli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v - u \rangle = \langle v, u \rangle - \|u\|^2$.
   C) la composizione di due trasf. ortogonali di V in V è una trasf. ortogonale di V in V.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\rho(A) + \rho(B) = \rho(A + B)$.
   B) il nucleo della trasf. lineare da $I\!R[t]$ a $I\!R[t]$ che manda ogni polinomio nella sua derivata è dato da tutti e soli i polinomi di $I\!R[t]$ costanti.
   C) la funzione $F : I\!R^2[t] \to I\!R^2$, $F(a + bt + ct^2) = (a + b + c, a - c)$ è una trasf. lineare.
   D) se $A \in M_n(I\!R)$ con A non regolare allora $\rho(A) = 0$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia $\bar{x}$ una sua soluzione (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se il sistema lineare $\mathbf{S}$ rappresenta una retta di $I\!R^n$ allora il sistema lineare ottenuto cancellando un'equazione di $\mathbf{S}$ rappresenta un piano.
   B) la matrice A è regolare.
   C) se $\bar{x}$ è il vettore nullo allora $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$.
   D) ogni sottospazio vettoriale di $I\!R^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette una ed una sola rappresentazione parametrica.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.
   B) due iperpiani di $I\!R^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(0, 1, 1)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.
   D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(0, 1, -1)$ è il punto $(1, 3, 2)$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due gruppi finiti hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.
   B) le due operazioni definite in un anello sono sempre associative.
   C) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma di successioni.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ regolari. Allora
   A) $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare.
   B) $(A^2 + B) \cdot (B^4 + A^3) = A^5 + B^5 + A^2 \cdot B^4 + B \cdot A^3$.
   C) $\det A^{100} > 0$.
   D) se A e B hanno lo stesso determinante allora $\det A^5 \cdot \det B^{-5} = 1$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che si annullano in 0 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in I\!R^4 : x \neq y, z = t\}$ è un sottospazio vettoriale di $I\!R^4$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, rispetto alle operazioni indotte.
   C) un sottoinsieme di $M_3(I\!R)$ contenente esattamente 8 elementi non può essere un sistema di generatori per $M_3(I\!R)$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado dispari è una base per lo spazio vettoriale $I\!R[t]$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = -s$ e $x + y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Allora
   A) se T è diagonalizzabile la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è n.
   B) se T è diagonalizzabile allora T^2 è anch'esso diagonalizzabile.
   C) autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.
   D) se il polinomio caratteristico di T ammette radici reali allora ne ammette anche quello di $T - I$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle = \langle v, \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{0}, v \rangle$.
   B) se u e v sono due vettori ortogonali di V allora $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
   C) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $h + 1$.
   D) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori non nulli a due a due ortogonali l'insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) $A + B + C$ è una matrice ortogonale.
   B) A, B, C sono invertibili e $\det(A \cdot B \cdot C \cdot {}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = 1$.
   C) $(2A + B) \cdot (2A - B) = 4A^2 - B^2$.
   D) $\det(A + B + C) = \det A + \det B + \det C$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle matrici 2×2 che hanno esattamente due coefficienti uguali a 1 e due uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 a coefficienti strettamente maggiori di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) due basi di $\mathbb{R}^8[t]$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, hanno sempre lo stesso numero di elementi.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x + y = 1$ e $x - y - z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) **S** ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ il sistema lineare **S** ammette una ed una sola soluzione.
   C) ogni sottospazio vettoriale di $I\!R^n$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ammette infinite rappresentazioni cartesiane.
   D) se $\rho(A) = 1$ allora il sistema lineare **S** rappresenta una retta di $I\!R^n$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : I\!R^n \to I\!R^n$ è una trasf. lineare con $\dim(Im\ T^2) < n$ allora $\ker T$ contiene almeno un vettore non nullo.
   B) la funzione $F : I\!R^4[t] \to I\!R^4[t]$, $F(p(t)) = p(t) + 1$ è una trasf. lineare.
   C) se $A \in M_n(I\!R)$ è la matrice nulla allora $\rho(A) = 0$.
   D) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T ammette n autovalori reali distinti allora $Tr(A)$ è la somma di tali autovalori.
   B) T è iniettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   C) se A è simmetrica allora anche B lo è.
   D) se A è regolare allora anche B lo è.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) due piani di $I\!R^n$ non coincidenti o sono paralleli oppure si intersecano.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0,0,1)$,$(0,1,2)$,$(1,1,1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto di coordinate $(0,0,1)$ ed il piano di equazione $x - y + z = 0$ è $1/2$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'anello delle matrici reali 2×2 (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   B) l'insieme delle classi di resto modulo 13 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione di funzioni.