Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme $\mathbf{Q}^+$ dei numeri razionali strettamente maggiori di zero è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   C) l'insieme $\{0, 1, 2\}$ è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = \max\{x, y\}$.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_{29}$ delle classi di resto modulo 29 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $B^{-1} \cdot {}^t(A \cdot {}^tB) \cdot {}^t(A^{-1}) = I$.
   B) se $A^2 = I$ si ha anche che $(A + I)^3 = 4 \cdot (A + I)$.
   C) $A + B + C$ è invertibile.
   D) $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali in cui il quinto termine è uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 7×7 con traccia nulla è un sistema di generatori di $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme $\{(-1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 1), (1, 1, -1, 1), (1, 1, 1, -1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado 9 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (z, y, x)$ è una trasformazione lineare.
   B) se $T : \mathbb{R}^8 \to \mathcal{M}_{2\times4}(\mathbb{R})$ è una trasformazione lineare suriettiva allora è anche iniettiva.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definita da $F(B) = B + {}^tB$ è una trasformazione lineare.
   D) la trasformazione lineare che manda ogni polinomio nella sua derivata seconda è iniettiva.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) **S** ammette una ed una sola soluzione se e solo se il rango di C coincide col numero delle incognite del sistema.
   B) **S** ammette soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   C) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $I\!R^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $I\!R^9$, da un (opportuno) sistema lineare di 4 equazioni in 9 incognite.
   D) se le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti allora **S** non ammette soluzioni.

6) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A è diagonalizzabile per similitudine allora T ammette n autovalori distinti.
   B) se $u_1, \dots, u_k$ sono autovettori non nulli di T associati ad autovalori distinti allora l'insieme $\{u_1, \dots, u_k\}$ è linearmente indipendente.
   C) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) se λ è un autovalore sia di S che di T allora è anche un autovalore di $S + T$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette almeno una base ortonormale.
   B) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora è una trasformazione ortogonale anche T^2.
   C) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in I\!R$ risulta $\langle \alpha \cdot u + \beta \cdot v, \alpha \cdot u + \beta \cdot v \rangle = \alpha^2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \langle u, v \rangle + \beta^2 \cdot \|v\|^2$.
   D) $((-1,0,0),(0,-1,0),(0,0,-1))$ e $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $I\!R^3$.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $4x - 5y - z = 1$ e $10x + 8y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1,1)$ e la retta di equazione $x + 2y = 1$ è uguale a 1.
   B) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(10,0,30)$ rispetto al punto $(20,20,20)$ è il punto $(30,0,10)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 1 - t, y = -t, z = 2$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i punti $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ sono i vertici di un triangolo equilatero.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Siano rispettivamente A e B le matrici di T relative a due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V. Allora
   A) esiste una matrice reale invertibile $F \in \mathcal{M}_n(I\!R)$ tale che $A = F \cdot B \cdot F^{-1}$.
   B) A e B sono simili e hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   C) A e B possono avere determinanti diversi fra loro.
   D) $A - B$ ha traccia nulla.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 0)$.
   B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione cartesiana $x - 2y + 2z = 0$ è uguale a $\frac{1}{3}$.
   C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, 0)$, $(2, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 2)$, $(2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ è uguale a 1.
   D) se u, v, w sono tre vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, w\rangle = \langle w \wedge u, v\rangle$.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = -3t$ e $x = 2t-1, y = t, z = t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se S e T sono due endomorfismi dello spazio vettoriale standard n-dimensionale $I\!R^n$ e $S(\tilde{e}_i) = T(\tilde{e}_i)$ per ogni vettore $\tilde{e}_i$ della base canonica di $I\!R^n$ allora S coincide con T.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_2(I\!R) \to \mathcal{M}_2(I\!R)$ definita da $F(A) = A \cdot {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   C) la somma di due trasformazioni lineari iniettive da $I\!R^5$ a $I\!R^5$ è iniettiva.
   D) una trasformazione lineare $T : I\!R^7 \to I\!R^5$ non può essere iniettiva.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   B) se $A \cdot B \cdot C$ è non invertibile anche $C \cdot B \cdot A$ è non invertibile.
   C) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ si ha anche che $B \cdot A = \mathbf{0}$.
   D) $\rho(A \cdot B) \leq \rho(A)$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi $(G, *)$ in cui l'operazione $*$ non è associativa.
   B) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = 2 \cdot (x + y)$ ($+ =$ usuale somma di numeri reali, $\cdot =$ usuale prodotto di numeri reali).
   C) l'insieme delle successioni reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_{14}$ delle classi di resto modulo 14 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$.
   A) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   B) il numero delle incognite di $\mathbf{S}$ è strettamente maggiore del rango del sistema se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella banale.
   C) $\mathbf{S}$ rappresenta un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.
   D) $\mathbf{S}$ ammette esattamente n soluzioni distinte.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno derivata quarta nulla, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \cdot z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) esistono matrici reali $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ tali che l'insieme $\{I, A, A^2, A^3, A^4, A^5\}$ sia un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia uguale a 1 è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $(x_1, \dots, x_n)$ è l'n-upla delle coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base ortonormale $(u_1, \dots, u_n)$ di V si ha che $x_i = \langle v, u_i \rangle$ per ogni indice i.
   B) per ogni $u, v \in V$ si ha che $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) se U è un sottospazio vettoriale di V allora $\dim U + \dim\ {}^{\perp}U = n$.
   D) ogni base di V è ortogonale.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.
   B) $B^{-1} \cdot {}^t(A \cdot {}^tB) \cdot {}^t(A^{-1}) = I$.
   C) se $A^2 = I$ si ha anche che $(A + I)^3 = 4 \cdot (A + I)$.
   D) $A + B + C$ è invertibile.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.
   B) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un (opportuno) sistema lineare di 4 equazioni in 9 incognite.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione se e solo se il rango di C coincide col numero delle incognite del sistema.

3) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se λ è un autovalore sia di S che di T allora è anche un autovalore di $S + T$.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se $u_1, \ldots, u_k$ sono autovettori non nulli di T associati ad autovalori distinti allora l'insieme $\{u_1, \ldots, u_k\}$ è linearmente indipendente.
   D) se A è diagonalizzabile per similitudine allora T ammette n autovalori distinti.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) ogni base di V è ortogonale.
   B) se U è un sottospazio vettoriale di V allora $\dim U + \dim {}^{\perp}U = n$.
   C) se $(x_1, \ldots, x_n)$ è l'n-upla delle coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base ortonormale $(u_1, \ldots, u_n)$ di V si ha che $x_i = \langle v, u_i \rangle$ per ogni indice i.
   D) per ogni $u, v \in V$ si ha che $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado 9 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle successioni reali in cui il quinto termine è uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 7×7 con traccia nulla è un sistema di generatori di $\mathcal{M}_7(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme $\{(-1,1,1,1),(1,-1,1,1),(1,1,-1,1),(1,1,1,-1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la trasformazione lineare che manda ogni polinomio nella sua derivata seconda è iniettiva.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_3(I\!R) \to \mathcal{M}_3(I\!R)$ definita da $F(B) = B + {}^tB$ è una trasformazione lineare.
   C) se $T : I\!R^8 \to \mathcal{M}_{2\times 4}(I\!R)$ è una trasformazione lineare suriettiva allora è anche iniettiva.
   D) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R^3$ definita da $F(x,y,z) = (z,y,x)$ è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = -3t$ e $x = 2t-1, y = t, z = t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v, w sono tre vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, w\rangle = \langle w \wedge u, v\rangle$.
   B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(2,\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},2)$, $(2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ è uguale a 1.
   C) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1,0,0)$, $(0,0,1)$ è il punto $(0,1,0)$.
   D) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1,1,1)$ e il piano di equazione cartesiana $x - 2y + 2z = 0$ è uguale a $\frac{1}{3}$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_{29}$ delle classi di resto modulo 29 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme $\mathbf{Q}^+$ dei numeri razionali strettamente maggiori di zero è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   D) l'insieme $\{0,1,2\}$ è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = \max\{x,y\}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(10, 0, 30)$ rispetto al punto $(20, 20, 20)$ è il punto $(30, 0, 10)$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 1 - t, y = -t, z = 2$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ sono i vertici di un triangolo equilatero.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $x + 2y = 1$ è uguale a 1.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$.
   A) $\mathbf{S}$ ammette esattamente n soluzioni distinte.
   B) $\mathbf{S}$ rappresenta un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.
   C) il numero delle incognite di $\mathbf{S}$ è strettamente maggiore del rango del sistema se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella banale.
   D) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_{14}$ delle classi di resto modulo 14 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = 2 \cdot (x + y)$ ($+ =$ usuale somma di numeri reali, $\cdot =$ usuale prodotto di numeri reali).
   C) esistono gruppi $(G, *)$ in cui l'operazione $*$ non è associativa.
   D) l'insieme delle successioni reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Siano rispettivamente A e B le matrici di T relative a due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V. Allora
   A) $A - B$ ha traccia nulla.
   B) A e B possono avere determinanti diversi fra loro.
   C) A e B sono simili e hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   D) esiste una matrice reale invertibile $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = F \cdot B \cdot F^{-1}$.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $4x - 5y - z = 1$ e $10x + 8y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora è una trasformazione ortogonale anche T^2.
   B) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in I\!R$ risulta $\langle \alpha \cdot u + \beta \cdot v, \alpha \cdot u + \beta \cdot v \rangle = \alpha^2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \langle u, v \rangle + \beta^2 \cdot \|v\|^2$.
   C) $((-1,0,0),(0,-1,0),(0,0,-1))$ e $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $I\!R^3$.
   D) V ammette almeno una base ortonormale.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia uguale a 1 è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_5(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x \cdot z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che hanno derivata quarta nulla, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   D) esistono matrici reali $A \in \mathcal{M}_5(I\!R)$ tali che l'insieme $\{I, A, A^2, A^3, A^4, A^5\}$ sia un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) $\rho(A \cdot B) \leq \rho(A)$.
   B) se $A \cdot B \cdot C$ è non invertibile anche $C \cdot B \cdot A$ è non invertibile.
   C) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   D) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ si ha anche che $B \cdot A = \mathbf{0}$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) una trasformazione lineare $T : I\!R^7 \to I\!R^5$ non può essere iniettiva.
   B) la somma di due trasformazioni lineari iniettive da $I\!R^5$ a $I\!R^5$ è iniettiva.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_2(I\!R) \to \mathcal{M}_2(I\!R)$ definita da $F(A) = A \cdot {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   D) se S e T sono due endomorfismi dello spazio vettoriale standard n-dimensionale $I\!R^n$ e $S(\tilde{e}_i) = T(\tilde{e}_i)$ per ogni vettore $\tilde{e}_i$ della base canonica di $I\!R^n$ allora S coincide con T.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) $\rho(A \cdot B) \leq \rho(A)$.
   B) $(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$.
   C) se $A \cdot B \cdot C$ è non invertibile anche $C \cdot B \cdot A$ è non invertibile.
   D) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ si ha anche che $B \cdot A = \mathbf{0}$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia uguale a 1 è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_5(I\!\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle funzioni da $I\!\!R$ in $I\!\!R$ che hanno derivata quarta nulla, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme $\{(x,y,z) \in I\!\!R^3 : x \cdot z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) esistono matrici reali $A \in \mathcal{M}_5(I\!\!R)$ tali che l'insieme $\{I, A, A^2, A^3, A^4, A^5\}$ sia un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(I\!\!R)$, dotato delle usuali operazioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $4x - 5y - z = 1$ e $10x + 8y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : I\!\!R^8 \to \mathcal{M}_{2\times 4}(I\!\!R)$ è una trasformazione lineare suriettiva allora è anche iniettiva.
   B) la funzione $F : I\!\!R^3 \to I\!\!R^3$ definita da $F(x,y,z) = (z,y,x)$ è una trasformazione lineare.
   C) la trasformazione lineare che manda ogni polinomio nella sua derivata seconda è iniettiva.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_3(I\!\!R) \to \mathcal{M}_3(I\!\!R)$ definita da $F(B) = B + {}^tB$ è una trasformazione lineare.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione se e solo se il rango di C coincide col numero delle incognite del sistema.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.
   D) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $I\!\!R^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $I\!\!R^9$, da un (opportuno) sistema lineare di 4 equazioni in 9 incognite.

6) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $u_1, \dots, u_k$ sono autovettori non nulli di T associati ad autovalori distinti allora l'insieme $\{u_1, \dots, u_k\}$ è linearmente indipendente.
   B) se A è diagonalizzabile per similitudine allora T ammette n autovalori distinti.
   C) se λ è un autovalore sia di S che di T allora è anche un autovalore di $S + T$.
   D) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora è una trasformazione ortogonale anche T^2.
   B) $((-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1))$ e $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.
   C) V ammette almeno una base ortonormale.
   D) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta $\langle \alpha \cdot u + \beta \cdot v, \alpha \cdot u + \beta \cdot v \rangle = \alpha^2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \langle u, v \rangle + \beta^2 \cdot \|v\|^2$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(10, 0, 30)$ rispetto al punto $(20, 20, 20)$ è il punto $(30, 0, 10)$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ sono i vertici di un triangolo equilatero.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $x + 2y = 1$ è uguale a 1.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 1 - t, y = -t, z = 2$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_{14}$ delle classi di resto modulo 14 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) esistono gruppi $(G, *)$ in cui l'operazione $*$ non è associativa.
   C) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = 2 \cdot (x + y)$ ($+ =$ usuale somma di numeri reali, $\cdot =$ usuale prodotto di numeri reali).
   D) l'insieme delle successioni reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se U è un sottospazio vettoriale di V allora $\dim U + \dim\ {}^{\perp}U = n$.
   B) ogni base di V è ortogonale.
   C) per ogni $u, v \in V$ si ha che $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) se $(x_1, \ldots, x_n)$ è l'n-upla delle coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base ortonormale $(u_1, \ldots, u_n)$ di V si ha che $x_i = \langle v, u_i \rangle$ per ogni indice i.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Siano rispettivamente A e B le matrici di T relative a due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V. Allora
   A) A e B sono simili e hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   B) esiste una matrice reale invertibile $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = F \cdot B \cdot F^{-1}$.
   C) A e B possono avere determinanti diversi fra loro.
   D) $A - B$ ha traccia nulla.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A^2 = I$ si ha anche che $(A + I)^3 = 4 \cdot (A + I)$.
   B) $A + B + C$ è invertibile.
   C) $B^{-1} \cdot\ {}^t(A \cdot\ {}^tB) \cdot\ {}^t(A^{-1}) = I$.
   D) $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Q}^+$ dei numeri razionali strettamente maggiori di zero è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   B) l'insieme $\{0, 1, 2\}$ è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = \max\{x, y\}$.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_{29}$ delle classi di resto modulo 29 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = -3t$ e $x = 2t - 1, y = t, z = t + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(2,\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},2)$, $(2+\sqrt{3},2+\sqrt{3})$ è uguale a 1.
   B) se u, v, w sono tre vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, w\rangle = \langle w \wedge u, v\rangle$.
   C) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1,1,1)$ e il piano di equazione cartesiana $x - 2y + 2z = 0$ è uguale a $\frac{1}{3}$.
   D) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1,0,0)$, $(0,0,1)$ è il punto $(0,1,0)$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A \cdot {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   B) se S e T sono due endomorfismi dello spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S(\tilde{e}_i) = T(\tilde{e}_i)$ per ogni vettore $\tilde{e}_i$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ allora S coincide con T.
   C) la somma di due trasformazioni lineari iniettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   D) una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ non può essere iniettiva.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 7×7 con traccia nulla è un sistema di generatori di $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme $\{(-1,1,1,1),(1,-1,1,1),(1,1,-1,1),(1,1,1,-1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle successioni reali in cui il quinto termine è uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado 9 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$.
   A) il numero delle incognite di $\mathbf{S}$ è strettamente maggiore del rango del sistema se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella banale.
   B) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   C) $\mathbf{S}$ rappresenta un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.
   D) $\mathbf{S}$ ammette esattamente n soluzioni distinte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B \cdot C$ è non invertibile anche $C \cdot B \cdot A$ è non invertibile.
   B) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ si ha anche che $B \cdot A = \mathbf{0}$.
   C) $\rho(A \cdot B) \leq \rho(A)$.
   D) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x \cdot z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) esistono matrici reali $A \in \mathcal{M}_5(I\!R)$ tali che l'insieme $\{I, A, A^2, A^3, A^4, A^5\}$ sia un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia uguale a 1 è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_5(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che hanno derivata quarta nulla, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : I\!R^8 \to \mathcal{M}_{2\times4}(I\!R)$ è una trasformazione lineare suriettiva allora è anche iniettiva.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_3(I\!R) \to \mathcal{M}_3(I\!R)$ definita da $F(B) = B + {}^tB$ è una trasformazione lineare.
   C) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R^3$ definita da $F(x, y, z) = (z, y, x)$ è una trasformazione lineare.
   D) la trasformazione lineare che manda ogni polinomio nella sua derivata seconda è iniettiva.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $I\!R^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $I\!R^9$, da un (opportuno) sistema lineare di 4 equazioni in 9 incognite.
   C) $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione se e solo se il rango di C coincide col numero delle incognite del sistema.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v, w sono tre vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, w\rangle = \langle w \wedge u, v\rangle$.
   B) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 0)$.
   C) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione cartesiana $x - 2y + 2z = 0$ è uguale a $\frac{1}{3}$.
   D) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, 0)$, $(2, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 2)$, $(2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ è uguale a 1.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = 2 \cdot (x + y)$ ($+ =$ usuale somma di numeri reali, $\cdot =$ usuale prodotto di numeri reali).
   B) l'insieme delle successioni reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_{14}$ delle classi di resto modulo 14 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) esistono gruppi $(G, *)$ in cui l'operazione $*$ non è associativa.

7) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $u_1, \dots, u_k$ sono autovettori non nulli di T associati ad autovalori distinti allora l'insieme $\{u_1, \dots, u_k\}$ è linearmente indipendente.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se A è diagonalizzabile per similitudine allora T ammette n autovalori distinti.
   D) se λ è un autovalore sia di S che di T allora è anche un autovalore di $S + T$.

8) Sia $\langle\cdot, \cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot, \cdot\rangle$. Allora
   A) ogni base di V è ortogonale.
   B) se $(x_1, \dots, x_n)$ è l'n-upla delle coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base ortonormale $(u_1, \dots, u_n)$ di V si ha che $x_i = \langle v, u_i\rangle$ per ogni indice i.
   C) per ogni $u, v \in V$ si ha che $\langle u, v\rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) se U è un sottospazio vettoriale di V allora $\dim U + \dim\ {}^{\perp}U = n$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = -3t$ e $x = 2t-1, y = t, z = t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$.
   A) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   B) $\mathbf{S}$ rappresenta un sottospazio vettoriale di $I\!R^n$, relativamente alla base canonica di $I\!R^n$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette esattamente n soluzioni distinte.
   D) il numero delle incognite di $\mathbf{S}$ è strettamente maggiore del rango del sistema se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella banale.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $4x-5y-z=1$ e $10x+8y=3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme $\mathbf{Q}^+$ dei numeri razionali strettamente maggiori di zero è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_{29}$ delle classi di resto modulo 29 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme $\{0,1,2\}$ è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = \max\{x,y\}$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x=-t, y=1, z=-t$ e $x=1-t, y=-t, z=2$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   B) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(10,0,30)$ rispetto al punto $(20,20,20)$ è il punto $(30,0,10)$.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1,1)$ e la retta di equazione $x+2y=1$ è uguale a 1.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i punti $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ sono i vertici di un triangolo equilatero.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali in cui il quinto termine è uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 7×7 con traccia nulla è un sistema di generatori di $\mathcal{M}_7(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado 9 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(-1,1,1,1),(1,-1,1,1),(1,1,-1,1),(1,1,1,-1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $B^{-1} \cdot {}^t(A \cdot {}^tB) \cdot {}^t(A^{-1}) = I$.
   B) se $A^2 = I$ si ha anche che $(A+I)^3 = 4 \cdot (A+I)$.
   C) $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.
   D) $A + B + C$ è invertibile.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Siano rispettivamente A e B le matrici di T relative a due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V. Allora
   A) esiste una matrice reale invertibile $F \in \mathcal{M}_n(I\!R)$ tale che $A = F \cdot B \cdot F^{-1}$.
   B) A e B possono avere determinanti diversi fra loro.
   C) $A - B$ ha traccia nulla.
   D) A e B sono simili e hanno lo stesso polinomio caratteristico.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se S e T sono due endomorfismi dello spazio vettoriale standard n-dimensionale $I\!R^n$ e $S(\tilde{e}_i) = T(\tilde{e}_i)$ per ogni vettore $\tilde{e}_i$ della base canonica di $I\!R^n$ allora S coincide con T.
   B) la somma di due trasformazioni lineari iniettive da $I\!R^5$ a $I\!R^5$ è iniettiva.
   C) una trasformazione lineare $T : I\!R^7 \to I\!R^5$ non può essere iniettiva.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_2(I\!R) \to \mathcal{M}_2(I\!R)$ definita da $F(A) = A \cdot {}^tA$ è una trasformazione lineare.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in I\!R$ risulta $\langle \alpha \cdot u + \beta \cdot v, \alpha \cdot u + \beta \cdot v \rangle = \alpha^2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \langle u, v \rangle + \beta^2 \cdot \|v\|^2$.
   B) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora è una trasformazione ortogonale anche T^2.
   C) V ammette almeno una base ortonormale.
   D) $((-1,0,0),(0,-1,0),(0,0,-1))$ e $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $I\!R^3$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 7×7 con traccia nulla è un sistema di generatori di $\mathcal{M}_7(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado 9 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(-1,1,1,1),(1,-1,1,1),(1,1,-1,1),(1,1,1,-1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   D) l'insieme delle successioni reali in cui il quinto termine è uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $4x - 5y - z = 1$ e $10x + 8y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(10, 0, 30)$ rispetto al punto $(20, 20, 20)$ è il punto $(30, 0, 10)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $x + 2y = 1$ è uguale a 1.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 1 - t, y = -t, z = 2$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ sono i vertici di un triangolo equilatero.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la trasformazione lineare che manda ogni polinomio nella sua derivata seconda è iniettiva.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_3(I\!R) \to \mathcal{M}_3(I\!R)$ definita da $F(B) = B + {}^tB$ è una trasformazione lineare.
   C) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R^3$ definita da $F(x, y, z) = (z, y, x)$ è una trasformazione lineare.
   D) se $T : I\!R^8 \to \mathcal{M}_{2\times4}(I\!R)$ è una trasformazione lineare suriettiva allora è anche iniettiva.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.

A) se le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti allora **S** non ammette soluzioni.

B) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un (opportuno) sistema lineare di 4 equazioni in 9 incognite.

C) **S** ammette una ed una sola soluzione se e solo se il rango di C coincide col numero delle incognite del sistema.

D) **S** ammette soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

6) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora

A) se λ è un autovalore sia di S che di T allora è anche un autovalore di $S + T$.

B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

C) se A è diagonalizzabile per similitudine allora T ammette n autovalori distinti.

D) se $u_1, \ldots, u_k$ sono autovettori non nulli di T associati ad autovalori distinti allora l'insieme $\{u_1, \ldots, u_k\}$ è linearmente indipendente.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora è una trasformazione ortogonale anche T^2.

B) V ammette almeno una base ortonormale.

C) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta $\langle \alpha \cdot u + \beta \cdot v, \alpha \cdot u + \beta \cdot v \rangle = \alpha^2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \langle u, v \rangle + \beta^2 \cdot \|v\|^2$.

D) $((-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1))$ e $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme $\mathbf{Q}^+$ dei numeri razionali strettamente maggiori di zero è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

B) l'insieme $\mathbf{Z}_{29}$ delle classi di resto modulo 29 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

C) l'insieme $\{0, 1, 2\}$ è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = \max\{x, y\}$.

D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

9) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora

A) se $A^2 = I$ si ha anche che $(A + I)^3 = 4 \cdot (A + I)$.

B) $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.

C) $A + B + C$ è invertibile.

D) $B^{-1} \cdot {}^t(A \cdot {}^tB) \cdot {}^t(A^{-1}) = I$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = -3t$ e $x = 2t-1, y = t, z = t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se U è un sottospazio vettoriale di V allora $\dim U + \dim\ {}^{\perp}U = n$.
   B) per ogni $u, v \in V$ si ha che $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) se $(x_1, \ldots, x_n)$ è l'n-upla delle coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base ortonormale $(u_1, \ldots, u_n)$ di V si ha che $x_i = \langle v, u_i \rangle$ per ogni indice i.
   D) ogni base di V è ortogonale.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ si ha anche che $B \cdot A = \mathbf{0}$.
   B) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   C) se $A \cdot B \cdot C$ è non invertibile anche $C \cdot B \cdot A$ è non invertibile.
   D) $\rho(A \cdot B) \leq \rho(A)$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) esistono gruppi $(G, *)$ in cui l'operazione $*$ non è associativa.
   C) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = 2 \cdot (x + y)$ ($+ =$ usuale somma di numeri reali, $\cdot =$ usuale prodotto di numeri reali).
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_{14}$ delle classi di resto modulo 14 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 A) esistono matrici reali $A \in \mathcal{M}_5(I\!R)$ tali che l'insieme $\{I, A, A^2, A^3, A^4, A^5\}$ sia un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
 B) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che hanno derivata quarta nulla, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
 C) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x \cdot z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
 D) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia uguale a 1 è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_5(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Siano rispettivamente A e B le matrici di T relative a due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V. Allora
 A) A e B sono simili e hanno lo stesso polinomio caratteristico.
 B) esiste una matrice reale invertibile $F \in \mathcal{M}_n(I\!R)$ tale che $A = F \cdot B \cdot F^{-1}$.
 C) A e B possono avere determinanti diversi fra loro.
 D) $A - B$ ha traccia nulla.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$.
 A) il numero delle incognite di $\mathbf{S}$ è strettamente maggiore del rango del sistema se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella banale.
 B) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
 C) $\mathbf{S}$ rappresenta un sottospazio vettoriale di $I\!R^n$, relativamente alla base canonica di $I\!R^n$.
 D) $\mathbf{S}$ ammette esattamente n soluzioni distinte.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
 A) la funzione $F : \mathcal{M}_2(I\!R) \to \mathcal{M}_2(I\!R)$ definita da $F(A) = A \cdot {}^tA$ è una trasformazione lineare.
 B) se S e T sono due endomorfismi dello spazio vettoriale standard n-dimensionale $I\!R^n$ e $S(\tilde{e}_i) = T(\tilde{e}_i)$ per ogni vettore $\tilde{e}_i$ della base canonica di $I\!R^n$ allora S coincide con T.
 C) la somma di due trasformazioni lineari iniettive da $I\!R^5$ a $I\!R^5$ è iniettiva.
 D) una trasformazione lineare $T : I\!R^7 \to I\!R^5$ non può essere iniettiva.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
 A) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, 0)$, $(2, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 2)$, $(2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ è uguale a 1.
 B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione cartesiana $x - 2y + 2z = 0$ è uguale a $\frac{1}{3}$.
 C) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 0)$.
 D) se u, v, w sono tre vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, w\rangle = \langle w \wedge u, v\rangle$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la trasformazione lineare che manda ogni polinomio nella sua derivata seconda è iniettiva.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (z, y, x)$ è una trasformazione lineare.
   C) se $T : \mathbb{R}^8 \to \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$ è una trasformazione lineare suriettiva allora è anche iniettiva.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definita da $F(B) = B + {}^tB$ è una trasformazione lineare.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se λ è un autovalore sia di S che di T allora è anche un autovalore di $S + T$.
   B) se A è diagonalizzabile per similitudine allora T ammette n autovalori distinti.
   C) se $u_1, \dots , u_k$ sono autovettori non nulli di T associati ad autovalori distinti allora l'insieme $\{u_1, \dots , u_k\}$ è linearmente indipendente.
   D) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) ogni base di V è ortogonale.
   B) se U è un sottospazio vettoriale di V allora $\dim U + \dim\ {}^\perp U = n$.
   C) per ogni $u, v \in V$ si ha che $\langle u, v\rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) se $(x_1, \dots , x_n)$ è l'n-upla delle coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base ortonormale $(u_1, \dots , u_n)$ di V si ha che $x_i = \langle v, u_i\rangle$ per ogni indice i.

4) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) se le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti allora **S** non ammette soluzioni.
   B) **S** ammette una ed una sola soluzione se e solo se il rango di C coincide col numero delle incognite del sistema.
   C) **S** ammette soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un (opportuno) sistema lineare di 4 equazioni in 9 incognite.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = -3t$ e $x = 2t-1, y = t, z = t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v, w sono tre vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, w\rangle = \langle w \wedge u, v\rangle$.
   B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(2,\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},2)$, $(2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ è uguale a 1.
   C) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1,1,1)$ e il piano di equazione cartesiana $x - 2y + 2z = 0$ è uguale a $\frac{1}{3}$.
   D) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1,0,0)$, $(0,0,1)$ è il punto $(0,1,0)$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_{29}$ delle classi di resto modulo 29 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme $\{0,1,2\}$ è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = \max\{x, y\}$.
   C) l'insieme $\mathbf{Q}^+$ dei numeri razionali strettamente maggiori di zero è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.
   B) $A + B + C$ è invertibile.
   C) se $A^2 = I$ si ha anche che $(A + I)^3 = 4 \cdot (A + I)$.
   D) $B^{-1} \cdot {}^t(A \cdot {}^tB) \cdot {}^t(A^{-1}) = I$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado 9 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(-1,1,1,1), (1,-1,1,1), (1,1,-1,1), (1,1,1,-1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle matrici reali 7×7 con traccia nulla è un sistema di generatori di $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle successioni reali in cui il quinto termine è uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B \cdot C$ è non invertibile anche $C \cdot B \cdot A$ è non invertibile.
   B) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ si ha anche che $B \cdot A = \mathbf{0}$.
   C) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   D) $\rho(A \cdot B) \leq \rho(A)$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Siano rispettivamente A e B le matrici di T relative a due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V. Allora
   A) A e B sono simili e hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   B) esiste una matrice reale invertibile $F \in \mathcal{M}_n(I\!R)$ tale che $A = F \cdot B \cdot F^{-1}$.
   C) $A - B$ ha traccia nulla.
   D) A e B possono avere determinanti diversi fra loro.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora è una trasformazione ortogonale anche T^2.
   B) V ammette almeno una base ortonormale.
   C) $((-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1))$ e $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $I\!R^3$.
   D) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in I\!R$ risulta $\langle \alpha \cdot u + \beta \cdot v, \alpha \cdot u + \beta \cdot v \rangle = \alpha^2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \langle u, v \rangle + \beta^2 \cdot \|v\|^2$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x \cdot z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) esistono matrici reali $A \in \mathcal{M}_5(I\!R)$ tali che l'insieme $\{I, A, A^2, A^3, A^4, A^5\}$ sia un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che hanno derivata quarta nulla, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia uguale a 1 è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_5(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = 2 \cdot (x + y)$ ($+ =$ usuale somma di numeri reali, $\cdot =$ usuale prodotto di numeri reali).
   B) l'insieme delle successioni reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) esistono gruppi $(G, *)$ in cui l'operazione $*$ non è associativa.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_{14}$ delle classi di resto modulo 14 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $4x - 5y - z = 1$ e $10x + 8y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$.
   A) il numero delle incognite di $\mathbf{S}$ è strettamente maggiore del rango del sistema se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella banale.
   B) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette esattamente n soluzioni distinte.
   D) $\mathbf{S}$ rappresenta un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A \cdot {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   B) se S e T sono due endomorfismi dello spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S(\tilde{e}_i) = T(\tilde{e}_i)$ per ogni vettore $\tilde{e}_i$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ allora S coincide con T.
   C) una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ non può essere iniettiva.
   D) la somma di due trasformazioni lineari iniettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(10, 0, 30)$ rispetto al punto $(20, 20, 20)$ è il punto $(30, 0, 10)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $x + 2y = 1$ è uguale a 1.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ sono i vertici di un triangolo equilatero.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 1 - t, y = -t, z = 2$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno derivata quarta nulla, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia uguale a 1 è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \cdot z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) esistono matrici reali $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ tali che l'insieme $\{I, A, A^2, A^3, A^4, A^5\}$ sia un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definita da $F(B) = B + {}^tB$ è una trasformazione lineare.
   B) la trasformazione lineare che manda ogni polinomio nella sua derivata seconda è iniettiva.
   C) se $T : \mathbb{R}^8 \to \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$ è una trasformazione lineare suriettiva allora è anche iniettiva.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (z, y, x)$ è una trasformazione lineare.

3) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un (opportuno) sistema lineare di 4 equazioni in 9 incognite.
   B) se le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti allora **S** non ammette soluzioni.
   C) **S** ammette soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) **S** ammette una ed una sola soluzione se e solo se il rango di C coincide col numero delle incognite del sistema.

4) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) se λ è un autovalore sia di S che di T allora è anche un autovalore di $S + T$.
   C) se $u_1, \ldots, u_k$ sono autovettori non nulli di T associati ad autovalori distinti allora l'insieme $\{u_1, \ldots, u_k\}$ è linearmente indipendente.
   D) se A è diagonalizzabile per similitudine allora T ammette n autovalori distinti.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
A) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
B) $\rho(A \cdot B) \leq \rho(A)$.
C) se $A \cdot B \cdot C$ è non invertibile anche $C \cdot B \cdot A$ è non invertibile.
D) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ si ha anche che $B \cdot A = \mathbf{0}$.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $4x - 5y - z = 1$ e $10x + 8y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 1 - t, y = -t, z = 2$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
B) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(10, 0, 30)$ rispetto al punto $(20, 20, 20)$ è il punto $(30, 0, 10)$.
C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $x + 2y = 1$ è uguale a 1.
D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ sono i vertici di un triangolo equilatero.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
A) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in I\!R$ risulta $\langle \alpha \cdot u + \beta \cdot v, \alpha \cdot u + \beta \cdot v \rangle = \alpha^2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \langle u, v \rangle + \beta^2 \cdot \|v\|^2$.
B) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora è una trasformazione ortogonale anche T^2.
C) V ammette almeno una base ortonormale.
D) $((-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1))$ e $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $I\!R^3$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
A) esistono gruppi $(G, *)$ in cui l'operazione $*$ non è associativa.
B) l'insieme $\mathbf{Z}_{14}$ delle classi di resto modulo 14 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
C) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = 2 \cdot (x + y)$ ($+ =$ usuale somma di numeri reali, $\cdot =$ usuale prodotto di numeri reali).
D) l'insieme delle successioni reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = -3t$ e $x = 2t-1, y = t, z = t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) ogni base di V è ortogonale.
   B) per ogni $u, v \in V$ si ha che $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) se $(x_1, \ldots, x_n)$ è l'n-upla delle coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base ortonormale $(u_1, \ldots, u_n)$ di V si ha che $x_i = \langle v, u_i \rangle$ per ogni indice i.
   D) se U è un sottospazio vettoriale di V allora $\dim U + \dim\ {}^{\perp}U = n$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $A + B + C$ è invertibile.
   B) $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.
   C) se $A^2 = I$ si ha anche che $(A + I)^3 = 4 \cdot (A + I)$.
   D) $B^{-1} \cdot\ {}^t(A \cdot\ {}^tB) \cdot\ {}^t(A^{-1}) = I$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{0, 1, 2\}$ è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = \max\{x, y\}$.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_{29}$ delle classi di resto modulo 29 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme $\mathbf{Q}^+$ dei numeri razionali strettamente maggiori di zero è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ non può essere iniettiva.
   B) la somma di due trasformazioni lineari iniettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A \cdot\ {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   D) se S e T sono due endomorfismi dello spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S(\tilde{e}_i) = T(\tilde{e}_i)$ per ogni vettore $\tilde{e}_i$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ allora S coincide con T.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(-1,1,1,1),(1,-1,1,1),(1,1,-1,1),(1,1,1,-1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado 9 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 7×7 con traccia nulla è un sistema di generatori di $\mathcal{M}_7(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle successioni reali in cui il quinto termine è uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v, w sono tre vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, w\rangle = \langle w \wedge u, v\rangle$.
   B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1,1,1)$ e il piano di equazione cartesiana $x - 2y + 2z = 0$ è uguale a $\frac{1}{3}$.
   C) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1,0,0)$, $(0,0,1)$ è il punto $(0,1,0)$.
   D) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(2,\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},2)$, $(2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ è uguale a 1.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$.
   A) $\mathbf{S}$ ammette esattamente n soluzioni distinte.
   B) $\mathbf{S}$ rappresenta un sottospazio vettoriale di $I\!R^n$, relativamente alla base canonica di $I\!R^n$.
   C) il numero delle incognite di $\mathbf{S}$ è strettamente maggiore del rango del sistema se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella banale.
   D) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Siano rispettivamente A e B le matrici di T relative a due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V. Allora
   A) $A - B$ ha traccia nulla.
   B) A e B possono avere determinanti diversi fra loro.
   C) A e B sono simili e hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   D) esiste una matrice reale invertibile $F \in \mathcal{M}_n(I\!R)$ tale che $A = F \cdot B \cdot F^{-1}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^8 \to \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$ è una trasformazione lineare suriettiva allora è anche iniettiva.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definita da $F(B) = B + {}^tB$ è una trasformazione lineare.
   C) la trasformazione lineare che manda ogni polinomio nella sua derivata seconda è iniettiva.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (z, y, x)$ è una trasformazione lineare.

2) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se U è un sottospazio vettoriale di V allora $\dim U + \dim\ {}^{\perp}U = n$.
   B) ogni base di V è ortogonale.
   C) se $(x_1, \dots , x_n)$ è l'n-upla delle coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base ortonormale $(u_1, \dots , u_n)$ di V si ha che $x_i = \langle v, u_i\rangle$ per ogni indice i.
   D) per ogni $u, v \in V$ si ha che $\langle u, v\rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

3) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) **S** ammette soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un (opportuno) sistema lineare di 4 equazioni in 9 incognite.
   C) se le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti allora **S** non ammette soluzioni.
   D) **S** ammette una ed una sola soluzione se e solo se il rango di C coincide col numero delle incognite del sistema.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = -3t$ e $x = 2t-1, y = t, z = t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(2,\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},2)$, $(2+\sqrt{3},2+\sqrt{3})$ è uguale a 1.
   B) se u,v,w sono tre vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u\wedge v,w\rangle = \langle w\wedge u,v\rangle$.
   C) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1,0,0)$, $(0,0,1)$ è il punto $(0,1,0)$.
   D) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1,1,1)$ e il piano di equazione cartesiana $x-2y+2z=0$ è uguale a $\frac{1}{3}$.

6) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $u_1,\dots,u_k$ sono autovettori non nulli di T associati ad autovalori distinti allora l'insieme $\{u_1,\dots,u_k\}$ è linearmente indipendente.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se λ è un autovalore sia di S che di T allora è anche un autovalore di $S+T$.
   D) se A è diagonalizzabile per similitudine allora T ammette n autovalori distinti.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_{14}$ delle classi di resto modulo 14 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) esistono gruppi $(G,*)$ in cui l'operazione $*$ non è associativa.
   C) l'insieme delle successioni reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x*y = 2\cdot(x+y)$ ($+$ = usuale somma di numeri reali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri reali).

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n\times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n\times n$. Allora
   A) $\rho(A\cdot B)\le\rho(A)$.
   B) $(A+B)\cdot(A-B) = A^2-B^2$.
   C) se $A\cdot B=\mathbf{0}$ si ha anche che $B\cdot A=\mathbf{0}$.
   D) se $A\cdot B\cdot C$ è non invertibile anche $C\cdot B\cdot A$ è non invertibile.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia uguale a 1 è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno derivata quarta nulla, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) esistono matrici reali $A\in\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ tali che l'insieme $\{I,A,A^2,A^3,A^4,A^5\}$ sia un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\cdot z=0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_{29}$ delle classi di resto modulo 29 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme $\mathbf{Q}^+$ dei numeri razionali strettamente maggiori di zero è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme $\{0, 1, 2\}$ è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = \max\{x, y\}$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Siano rispettivamente A e B le matrici di T relative a due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V. Allora
   A) $A - B$ ha traccia nulla.
   B) A e B sono simili e hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   C) A e B possono avere determinanti diversi fra loro.
   D) esiste una matrice reale invertibile $F \in \mathcal{M}_n(I\!R)$ tale che $A = F \cdot B \cdot F^{-1}$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado 9 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 7×7 con traccia nulla è un sistema di generatori di $\mathcal{M}_7(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme delle successioni reali in cui il quinto termine è uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(-1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 1), (1, 1, -1, 1), (1, 1, 1, -1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.

4) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.
   B) se $A^2 = I$ si ha anche che $(A + I)^3 = 4 \cdot (A + I)$.
   C) $B^{-1} \cdot {}^t(A \cdot {}^tB) \cdot {}^t(A^{-1}) = I$.
   D) $A + B + C$ è invertibile.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$.
   A) $\mathbf{S}$ ammette esattamente n soluzioni distinte.
   B) il numero delle incognite di $\mathbf{S}$ è strettamente maggiore del rango del sistema se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella banale.
   C) $\mathbf{S}$ rappresenta un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.
   D) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ non può essere iniettiva.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A \cdot {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   C) la somma di due trasformazioni lineari iniettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   D) se S e T sono due endomorfismi dello spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S(\tilde{e}_i) = T(\tilde{e}_i)$ per ogni vettore $\tilde{e}_i$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ allora S coincide con T.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) $((-1,0,0),(0,-1,0),(0,0,-1))$ e $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.
   B) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta $\langle \alpha \cdot u + \beta \cdot v, \alpha \cdot u + \beta \cdot v \rangle = \alpha^2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \langle u, v \rangle + \beta^2 \cdot \|v\|^2$.
   C) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora è una trasformazione ortogonale anche T^2.
   D) V ammette almeno una base ortonormale.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i punti $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ sono i vertici di un triangolo equilatero.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 1-t, y = -t, z = 2$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   C) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(10,0,30)$ rispetto al punto $(20,20,20)$ è il punto $(30,0,10)$.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1,1)$ e la retta di equazione $x + 2y = 1$ è uguale a 1.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $4x - 5y - z = 1$ e $10x + 8y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $4x - 5y - z = 1$ e $10x + 8y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(10, 0, 30)$ rispetto al punto $(20, 20, 20)$ è il punto $(30, 0, 10)$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 1 - t, y = -t, z = 2$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $x + 2y = 1$ è uguale a 1.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ sono i vertici di un triangolo equilatero.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 7×7 con traccia nulla è un sistema di generatori di $\mathcal{M}_7(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado 9 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(-1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 1), (1, 1, -1, 1), (1, 1, 1, -1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   D) l'insieme delle successioni reali in cui il quinto termine è uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A è diagonalizzabile per similitudine allora T ammette n autovalori distinti.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se $u_1, \dots, u_k$ sono autovettori non nulli di T associati ad autovalori distinti allora l'insieme $\{u_1, \dots, u_k\}$ è linearmente indipendente.
   D) se λ è un autovalore sia di S che di T allora è anche un autovalore di $S + T$.

5) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora è una trasformazione ortogonale anche T^2.
   B) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in I\!R$ risulta $\langle \alpha \cdot u + \beta \cdot v, \alpha \cdot u + \beta \cdot v\rangle = \alpha^2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \langle u, v\rangle + \beta^2 \cdot \|v\|^2$.
   C) V ammette almeno una base ortonormale.
   D) $((-1,0,0),(0,-1,0),(0,0,-1))$ e $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $I\!R^3$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Q}^+$ dei numeri razionali strettamente maggiori di zero è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_{29}$ delle classi di resto modulo 29 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme $\{0,1,2\}$ è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = \max\{x, y\}$.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A^2 = I$ si ha anche che $(A + I)^3 = 4 \cdot (A + I)$.
   B) $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.
   C) $A + B + C$ è invertibile.
   D) $B^{-1} \cdot {}^t(A \cdot {}^tB) \cdot {}^t(A^{-1}) = I$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R^3$ definita da $F(x, y, z) = (z, y, x)$ è una trasformazione lineare.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_3(I\!R) \to \mathcal{M}_3(I\!R)$ definita da $F(B) = B + {}^tB$ è una trasformazione lineare.
   C) se $T : I\!R^8 \to \mathcal{M}_{2\times 4}(I\!R)$ è una trasformazione lineare suriettiva allora è anche iniettiva.
   D) la trasformazione lineare che manda ogni polinomio nella sua derivata seconda è iniettiva.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione se e solo se il rango di C coincide col numero delle incognite del sistema.
   B) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $I\!R^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $I\!R^9$, da un (opportuno) sistema lineare di 4 equazioni in 9 incognite.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la somma di due trasformazioni lineari iniettive da $I\!R^5$ a $I\!R^5$ è iniettiva.
   B) se S e T sono due endomorfismi dello spazio vettoriale standard n-dimensionale $I\!R^n$ e $S(\tilde{e}_i) = T(\tilde{e}_i)$ per ogni vettore $\tilde{e}_i$ della base canonica di $I\!R^n$ allora S coincide con T.
   C) una trasformazione lineare $T : I\!R^7 \to I\!R^5$ non può essere iniettiva.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_2(I\!R) \to \mathcal{M}_2(I\!R)$ definita da $F(A) = A \cdot {}^tA$ è una trasformazione lineare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi $(G, *)$ in cui l'operazione $*$ non è associativa.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_{14}$ delle classi di resto modulo 14 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle successioni reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = 2 \cdot (x + y)$ ($+ =$ usuale somma di numeri reali, $\cdot =$ usuale prodotto di numeri reali).

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Siano rispettivamente A e B le matrici di T relative a due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V. Allora
   A) A e B possono avere determinanti diversi fra loro.
   B) esiste una matrice reale invertibile $F \in \mathcal{M}_n(I\!R)$ tale che $A = F \cdot B \cdot F^{-1}$.
   C) $A - B$ ha traccia nulla.
   D) A e B sono simili e hanno lo stesso polinomio caratteristico.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione cartesiana $x - 2y + 2z = 0$ è uguale a $\frac{1}{3}$.
   B) se u, v, w sono tre vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, w\rangle = \langle w \wedge u, v\rangle$.
   C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, 0)$, $(2, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 2)$, $(2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ è uguale a 1.
   D) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 0)$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno derivata quarta nulla, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia uguale a 1 è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) esistono matrici reali $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ tali che l'insieme $\{I, A, A^2, A^3, A^4, A^5\}$ sia un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \cdot z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   B) $\rho(A \cdot B) \leq \rho(A)$.
   C) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ si ha anche che $B \cdot A = \mathbf{0}$.
   D) se $A \cdot B \cdot C$ è non invertibile anche $C \cdot B \cdot A$ è non invertibile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ si ha che $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) ogni base di V è ortogonale.
   C) se U è un sottospazio vettoriale di V allora $\dim U + \dim\, {}^{\perp}U = n$.
   D) se $(x_1, \dots, x_n)$ è l'n-upla delle coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base ortonormale $(u_1, \dots, u_n)$ di V si ha che $x_i = \langle v, u_i \rangle$ per ogni indice i.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$.
   A) $\mathbf{S}$ rappresenta un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.
   B) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette esattamente n soluzioni distinte.
   D) il numero delle incognite di $\mathbf{S}$ è strettamente maggiore del rango del sistema se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella banale.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = -3t$ e $x = 2t - 1, y = t, z = t + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^8 \to \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$ è una trasformazione lineare suriettiva allora è anche iniettiva.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (z, y, x)$ è una trasformazione lineare.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definita da $F(B) = B + {}^tB$ è una trasformazione lineare.
   D) la trasformazione lineare che manda ogni polinomio nella sua derivata seconda è iniettiva.

2) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) **S** ammette soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) **S** ammette una ed una sola soluzione se e solo se il rango di C coincide col numero delle incognite del sistema.
   C) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un (opportuno) sistema lineare di 4 equazioni in 9 incognite.
   D) se le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti allora **S** non ammette soluzioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = -3t$ e $x = 2t-1, y = t, z = t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v, w sono tre vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, w\rangle = \langle w \wedge u, v\rangle$.
   B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, 0)$, $(2, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 2)$, $(2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ è uguale a 1.
   C) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 0)$.
   D) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione cartesiana $x - 2y + 2z = 0$ è uguale a $\frac{1}{3}$.

5) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $u_1, \dots, u_k$ sono autovettori non nulli di T associati ad autovalori distinti allora l'insieme $\{u_1, \dots, u_k\}$ è linearmente indipendente.
   B) se A è diagonalizzabile per similitudine allora T ammette n autovalori distinti.
   C) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) se λ è un autovalore sia di S che di T allora è anche un autovalore di $S + T$.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) ogni base di V è ortogonale.
   B) se U è un sottospazio vettoriale di V allora $\dim U + \dim\ {}^{\perp}U = n$.
   C) se $(x_1, \dots, x_n)$ è l'n-upla delle coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base ortonormale $(u_1, \dots, u_n)$ di V si ha che $x_i = \langle v, u_i \rangle$ per ogni indice i.
   D) per ogni $u, v \in V$ si ha che $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_{29}$ delle classi di resto modulo 29 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme $\{0, 1, 2\}$ è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = \max\{x, y\}$.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme $\mathbf{Q}^+$ dei numeri razionali strettamente maggiori di zero è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.
   B) $A + B + C$ è invertibile.
   C) $B^{-1} \cdot\ {}^t(A \cdot\ {}^tB) \cdot\ {}^t(A^{-1}) = I$.
   D) se $A^2 = I$ si ha anche che $(A + I)^3 = 4 \cdot (A + I)$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado 9 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(-1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 1), (1, 1, -1, 1), (1, 1, 1, -1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle successioni reali in cui il quinto termine è uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 7×7 con traccia nulla è un sistema di generatori di $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ si ha anche che $B \cdot A = \mathbf{0}$.
   B) $\rho(A \cdot B) \leq \rho(A)$.
   C) se $A \cdot B \cdot C$ è non invertibile anche $C \cdot B \cdot A$ è non invertibile.
   D) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_{14}$ delle classi di resto modulo 14 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = 2 \cdot (x + y)$ ($+ =$ usuale somma di numeri reali, $\cdot =$ usuale prodotto di numeri reali).
   D) esistono gruppi $(G, *)$ in cui l'operazione $*$ non è associativa.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono matrici reali $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ tali che l'insieme $\{I, A, A^2, A^3, A^4, A^5\}$ sia un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia uguale a 1 è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \cdot z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno derivata quarta nulla, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora è una trasformazione ortogonale anche T^2.
   B) V ammette almeno una base ortonormale.
   C) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta $\langle \alpha \cdot u + \beta \cdot v, \alpha \cdot u + \beta \cdot v \rangle = \alpha^2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \langle u, v \rangle + \beta^2 \cdot \|v\|^2$.
   D) $((-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1))$ e $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$.
   A) $\mathbf{S}$ ammette esattamente n soluzioni distinte.
   B) $\mathbf{S}$ rappresenta un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.
   C) il numero delle incognite di $\mathbf{S}$ è strettamente maggiore del rango del sistema se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella banale.
   D) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ non può essere iniettiva.
   B) la somma di due trasformazioni lineari iniettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A \cdot {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   D) se S e T sono due endomorfismi dello spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S(\tilde{e}_i) = T(\tilde{e}_i)$ per ogni vettore $\tilde{e}_i$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ allora S coincide con T.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $4x - 5y - z = 1$ e $10x + 8y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(10, 0, 30)$ rispetto al punto $(20, 20, 20)$ è il punto $(30, 0, 10)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $x + 2y = 1$ è uguale a 1.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 1 - t, y = -t, z = 2$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ sono i vertici di un triangolo equilatero.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Siano rispettivamente A e B le matrici di T relative a due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V. Allora
   A) $A - B$ ha traccia nulla.
   B) A e B possono avere determinanti diversi fra loro.
   C) A e B sono simili e hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   D) esiste una matrice reale invertibile $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = F \cdot B \cdot F^{-1}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione se e solo se il rango di C coincide col numero delle incognite del sistema.
   C) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un (opportuno) sistema lineare di 4 equazioni in 9 incognite.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $u_1, \ldots, u_k$ sono autovettori non nulli di T associati ad autovalori distinti allora l'insieme $\{u_1, \ldots, u_k\}$ è linearmente indipendente.
   B) se A è diagonalizzabile per similitudine allora T ammette n autovalori distinti.
   C) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) se λ è un autovalore sia di S che di T allora è anche un autovalore di $S + T$.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora è una trasformazione ortogonale anche T^2.
   B) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta $\langle \alpha \cdot u + \beta \cdot v, \alpha \cdot u + \beta \cdot v \rangle = \alpha^2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \langle u, v \rangle + \beta^2 \cdot \|v\|^2$.
   C) $((-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1))$ e $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.
   D) V ammette almeno una base ortonormale.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = 2 \cdot (x + y)$ ($+ =$ usuale somma di numeri reali, $\cdot =$ usuale prodotto di numeri reali).
   B) l'insieme delle successioni reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) esistono gruppi $(G, *)$ in cui l'operazione $*$ non è associativa.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_{14}$ delle classi di resto modulo 14 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $4x - 5y - z = 1$ e $10x + 8y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(10, 0, 30)$ rispetto al punto $(20, 20, 20)$ è il punto $(30, 0, 10)$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 1 - t, y = -t, z = 2$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ sono i vertici di un triangolo equilatero.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $x + 2y = 1$ è uguale a 1.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B \cdot C$ è non invertibile anche $C \cdot B \cdot A$ è non invertibile.
   B) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ si ha anche che $B \cdot A = \mathbf{0}$.
   C) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   D) $\rho(A \cdot B) \leq \rho(A)$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \cdot z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) esistono matrici reali $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ tali che l'insieme $\{I, A, A^2, A^3, A^4, A^5\}$ sia un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno derivata quarta nulla, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia uguale a 1 è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^8 \to \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$ è una trasformazione lineare suriettiva allora è anche iniettiva.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (z, y, x)$ è una trasformazione lineare.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definita da $F(B) = B + {}^tB$ è una trasformazione lineare.
   D) la trasformazione lineare che manda ogni polinomio nella sua derivata seconda è iniettiva.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A^2 = I$ si ha anche che $(A+I)^3 = 4 \cdot (A+I)$.
   B) $B^{-1} \cdot\ {}^t(A \cdot\ {}^tB) \cdot\ {}^t(A^{-1}) = I$.
   C) $A + B + C$ è invertibile.
   D) $\rho(A \cdot B) = \rho(A) \cdot \rho(B)$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Q}^+$ dei numeri razionali strettamente maggiori di zero è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme $\{0, 1, 2\}$ è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = \max\{x, y\}$.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_{29}$ delle classi di resto modulo 29 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la somma di due trasformazioni lineari iniettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   B) una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ non può essere iniettiva.
   C) se S e T sono due endomorfismi dello spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S(\tilde{e}_i) = T(\tilde{e}_i)$ per ogni vettore $\tilde{e}_i$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ allora S coincide con T.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A \cdot\ {}^tA$ è una trasformazione lineare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 7×7 con traccia nulla è un sistema di generatori di $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme delle successioni reali in cui il quinto termine è uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(-1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 1), (1, 1, -1, 1), (1, 1, 1, -1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado 9 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = -3t$ e $x = 2t-1, y = t, z = t+1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se U è un sottospazio vettoriale di V allora $\dim U + \dim\ ^{\perp}U = n$.
   B) per ogni $u, v \in V$ si ha che $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) ogni base di V è ortogonale.
   D) se $(x_1, \ldots, x_n)$ è l'n-upla delle coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base ortonormale $(u_1, \ldots, u_n)$ di V si ha che $x_i = \langle v, u_i \rangle$ per ogni indice i.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Siano rispettivamente A e B le matrici di T relative a due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V. Allora
   A) A e B possono avere determinanti diversi fra loro.
   B) $A - B$ ha traccia nulla.
   C) esiste una matrice reale invertibile $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = F \cdot B \cdot F^{-1}$.
   D) A e B sono simili e hanno lo stesso polinomio caratteristico.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, 0)$, $(2, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 2)$, $(2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ è uguale a 1.
   B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione cartesiana $x - 2y + 2z = 0$ è uguale a $\frac{1}{3}$.
   C) se u, v, w sono tre vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, w \rangle = \langle w \wedge u, v \rangle$.
   D) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 0)$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$.
   A) $\mathbf{S}$ rappresenta un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.
   B) $\mathbf{S}$ ammette esattamente n soluzioni distinte.
   C) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   D) il numero delle incognite di $\mathbf{S}$ è strettamente maggiore del rango del sistema se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella banale.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ si ha che $\langle u, v\rangle \le \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) ogni base di V è ortogonale.
   C) se $(x_1, \dots, x_n)$ è l'n-upla delle coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base ortonormale $(u_1, \dots, u_n)$ di V si ha che $x_i = \langle v, u_i\rangle$ per ogni indice i.
   D) se U è un sottospazio vettoriale di V allora $\dim U + \dim\ {}^{\perp}U = n$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definita da $F(B) = B + {}^tB$ è una trasformazione lineare.
   B) se $T : \mathbb{R}^8 \to \mathcal{M}_{2\times4}(\mathbb{R})$ è una trasformazione lineare suriettiva allora è anche iniettiva.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (z, y, x)$ è una trasformazione lineare.
   D) la trasformazione lineare che manda ogni polinomio nella sua derivata seconda è iniettiva.

3) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathbb{R}^9$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^9$, da un (opportuno) sistema lineare di 4 equazioni in 9 incognite.
   B) **S** ammette soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   C) **S** ammette una ed una sola soluzione se e solo se il rango di C coincide col numero delle incognite del sistema.
   D) se le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti allora **S** non ammette soluzioni.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione cartesiana $x - 2y + 2z = 0$ è uguale a $\frac{1}{3}$.
   B) se u, v, w sono tre vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, w\rangle = \langle w \wedge u, v\rangle$.
   C) nello spazio euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 0)$.
   D) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, 0)$, $(2, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 2)$, $(2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ è uguale a 1.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi $(G, *)$ in cui l'operazione $*$ non è associativa.
   B) l'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = 2 \cdot (x + y)$ ($+ =$ usuale somma di numeri reali, $\cdot =$ usuale prodotto di numeri reali).
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_{14}$ delle classi di resto modulo 14 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle successioni reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Allora
   A) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   B) se $A \cdot B \cdot C$ è non invertibile anche $C \cdot B \cdot A$ è non invertibile.
   C) $\rho(A \cdot B) \leq \rho(A)$.
   D) se $A \cdot B = \mathbf{0}$ si ha anche che $B \cdot A = \mathbf{0}$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno derivata quarta nulla, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \cdot z = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 con traccia uguale a 1 è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) esistono matrici reali $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ tali che l'insieme $\{I, A, A^2, A^3, A^4, A^5\}$ sia un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = -3t$ e $x = 2t - 1, y = t, z = t + 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

9) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) se $u_1, \ldots, u_k$ sono autovettori non nulli di T associati ad autovalori distinti allora l'insieme $\{u_1, \ldots, u_k\}$ è linearmente indipendente.
   C) se A è diagonalizzabile per similitudine allora T ammette n autovalori distinti.
   D) se λ è un autovalore sia di S che di T allora è anche un autovalore di $S + T$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) V ammette almeno una base ortonormale.
   B) $((-1,0,0),(0,-1,0),(0,0,-1))$ e $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ sono basi discordi dello spazio vettoriale euclideo standard $I\!R^3$.
   C) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in I\!R$ risulta $\langle \alpha\cdot u + \beta\cdot v, \alpha\cdot u + \beta\cdot v\rangle = \alpha^2\cdot\|u\|^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\langle u, v\rangle + \beta^2\cdot\|v\|^2$.
   D) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora è una trasformazione ortogonale anche T^2.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n\times n$ invertibili e I la matrice identica $n\times n$. Allora
   A) $A + B + C$ è invertibile.
   B) se $A^2 = I$ si ha anche che $(A + I)^3 = 4\cdot(A + I)$.
   C) $B^{-1}\cdot\ {}^t(A\cdot\ {}^tB)\cdot\ {}^t(A^{-1}) = I$.
   D) $\rho(A\cdot B) = \rho(A)\cdot\rho(B)$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(-1,1,1,1),(1,-1,1,1),(1,1,-1,1),(1,1,1,-1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   B) l'insieme delle matrici reali 7×7 con traccia nulla è un sistema di generatori di $\mathcal{M}_7(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme delle successioni reali in cui il quinto termine è uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado 9 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $4x - 5y - z = 1$ e $10x + 8y = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$.
   A) $\mathbf{S}$ rappresenta un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.
   B) il numero delle incognite di $\mathbf{S}$ è strettamente maggiore del rango del sistema se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni diverse da quella banale.
   C) se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora anche $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   D) $\mathbf{S}$ ammette esattamente n soluzioni distinte.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la somma di due trasformazioni lineari iniettive da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è iniettiva.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A \cdot {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   C) se S e T sono due endomorfismi dello spazio vettoriale standard n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ e $S(\tilde{e}_i) = T(\tilde{e}_i)$ per ogni vettore $\tilde{e}_i$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ allora S coincide con T.
   D) una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ non può essere iniettiva.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Siano rispettivamente A e B le matrici di T relative a due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V. Allora
   A) A e B possono avere determinanti diversi fra loro.
   B) A e B sono simili e hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   C) esiste una matrice reale invertibile $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = F \cdot B \cdot F^{-1}$.
   D) $A - B$ ha traccia nulla.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $x + 2y = 1$ è uguale a 1.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ sono i vertici di un triangolo equilatero.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = -t, y = 1, z = -t$ e $x = 1 - t, y = -t, z = 2$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   D) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(10, 0, 30)$ rispetto al punto $(20, 20, 20)$ è il punto $(30, 0, 10)$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{0, 1, 2\}$ è un gruppo rispetto all'operazione $x * y = \max\{x, y\}$.
   B) l'insieme $\mathbf{Q}^+$ dei numeri razionali strettamente maggiori di zero è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_{29}$ delle classi di resto modulo 29 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.